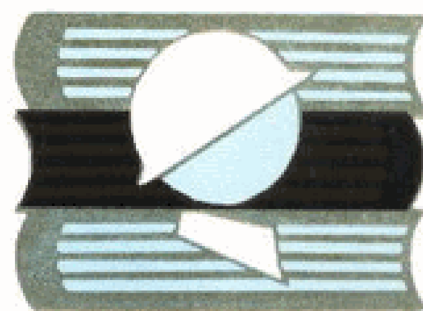
少年百科丛书

精选本



数学游戏故事

谈祥柏　张景中

shao nian bai kecong shu jing xuan ben

- 全国第一套以少年为对象的大型丛书。
- 着眼于启发思想，丰富知识，培养能力，引起兴趣。
- 被专家、学者誉为"通向知识海洋的窗口"、"哺育巨人的乳汁"。
- 1978年出版以来，累计印行5000万册。
- 原教育部曾发出专门文件向全国中小学生推荐。

中国少年儿童出版社

内容提要

数学游戏故事的花样和变化是很多的。这本书应用初中数学知识，把22个有趣的游戏故事讲得浅显明白、丰富多采，使人格外喜爱。你一边看，一边想，可以增加学习数学的兴趣，还可以从中学到认识、分析和解决数学问题的思路和方法。

数学游戏故事

谈祥柏　张景中

*

中国少年儿童出版社出版发行

广东肇庆新华印刷厂印刷　新华书店经销

*

787×1092　1/32　3.75印张　2插页　41千字

1984年10月北京第1版　1996年3月第5次印刷

定价：（全套120册）780.00元



目 次





原来这样简单

有些看来很难的问题，其实简单得出人意料。

航海家哥伦布，在发现了美洲新大陆之后的一次庆祝宴会上，听到有人说："这有什么难呢？叫几个孩子坐了船去，也办得到。"哥伦布当场伸手从桌上拿起一个鸡蛋问："谁能把它立起来？"客人们面面相觑。哥伦布把蛋在桌子上一敲，蛋壳破了，可是也立起来了。

这个故事，很多人知道。

再看这个问题：一根绳子从上面挂下来，下边拴了一个茶杯。要把绳子剪断，不许茶杯掉下来，办得到吗？

其实很简单，先打一个带环的结，再把结旁边的环剪断，杯子当然不会掉下来。

数学上也有类似的情形：看似复杂，其实简单。

有甲、乙两只杯子。甲杯中有10毫升水，乙杯中有20毫升酒。从甲杯里用滴管取出1毫升水，放入乙杯中，充分搅拌以后，再把混合液取出1毫升放回到甲杯。问这时甲杯中的酒和乙杯中的水，分量是不是相等的？要是不相等，是甲杯里的酒多，还是乙杯里的水多？



这个题有些唬人。其实，根本不需要计算，你就能回答：甲杯里的酒和乙杯里的水是一样多的。因为甲杯得到的酒，正好等于它失去的水；而所失去的水，又都在乙杯中。两者非相等不可！

当然，这里要有一个假定：水和酒混合后，体积是原来两种体积的和。实际上，要是很淡的酒，这大体上是对的；要是水和酒精混合，体积就会有所减少。

还有不少数学游戏，看起来使你惊奇，等到弄清了道理，却十分简单。

这是一副扑克牌，共 52 张，把它分成相等的两叠，一叠朝上，一叠朝下，面对面再合到一起。请你随便洗上几次后，再分一半给我。

现在，请把你手里的牌一张一张地摊开放在桌子上，数一数，有多少张朝上的。比方说是 15 张朝上的。

巧不巧？我手里也正好有 15 张朝上的！

再玩一次，15 可能变成 7。这里，我手里也正好有 7 张朝上。

诀窍在哪里呢？

朝上的牌共有 26 张，你手里有 15 张，我手里剩下 11张。注意，我手里的另外 15 张是朝下的，只要在你不注意时，我把这一半牌翻一下，不就是 15 张朝上了吗！

当然，也可以随便分出一些，比如分出 20 张朝上，你洗完之后交还给我 20 张。这样，你手里有多少朝上的，我手里就有多少朝下的，翻一下，就一样多了。两叠牌不一样多，这游戏更使人惊奇。

这个游戏里有一个手法——把牌翻一下，这是一个偷偷摸摸的动作。下一个游戏，可就完全是真的了。

把一副扑克牌，红黑相间，一张隔一张地预先摆

好。分成两叠，这两叠不一定相等。最下面的那两张，要一红一黑。请你把这两叠牌随便洗一次，然后交给我。

我手拿这叠牌放在桌子下面，你看不见，我也看不见。可是，我可以两张两张地向外拿，这两张，总是一红一黑。就象我手上有眼一样。

是什么道理呢？我不过从上面拿两张罢了。

说来也很简单。洗牌的时候，总有一张牌先落下来。比如先落一张红的，第二张不论从哪叠里落下，总是黑的。因为最下面的两张已经摆好，是一红一黑！把落下的这两张拿掉，两叠牌的最下面，仍然是红黑不同。依此类推，直到最上面的两张，都是一红一黑。

要是换一个花样，就更令人惊奇。把一副扑克先按红心、黑桃、方块、梅花的顺序，一张一张地交错叠好。再从上面一张一张地拿大约 26 张，放在桌子上叠成另一叠，使新的一叠里的最下面的一张，恰好是刚才最上面的一张。把两叠牌随便洗在一起。然后从上面取四张，这四张必然花色不同；再四张四张地取，花色仍然不同！

你能说明其中的道理吗？



猜中和猜不中

有些游戏就是怪。看来能猜中的偏偏猜不中。看来猜不中的偏偏猜得中。

不信，各讲一个给你听。

小牛和小马、小羊在一起做游戏。小牛用两小张纸，各写一个数。这两个数都是正整数，相差是1。他把一张纸贴在小马额头上，另一张贴在小羊额头上。于是，两个人只能看见对方头上的数。

小牛不断地问他们，你们谁能猜到自己头上的数吗？

小马说：我猜不到；

小羊说：我也猜不到。

小马又说：我还是猜不到；

小羊又说：我也猜不到。

小马仍然猜不到；

小羊仍然猜不到。

小马和小羊都已经三次猜不到了。

可是，到了第四次，小马喊起来：我知道了！小羊也喊道：我也知道了！

请你想想，他们头上是什么数？怎么猜到的？

原来，"猜不到" 这句话里，包含了一个重要的信息。

要是小羊头上是1，小马当然知道自己头上是2。小马第一次说"猜不到"，就等于告诉小羊，你头上的数不是1！

这时，要是小马头上是2，小羊当然知道自己头上应当是3。可是，小羊说猜不到，就等于说：小马，你头上不是2！

第二次小马又说猜不到，就等于说：小羊头上不是3，不这样，我头上一定是4，我就能猜到了。

小羊又说猜不到，说明小马头上不是4。

小马又说猜不到，小羊头上不是5。

小羊又说猜不到，小马头上不是6。

小马为什么这时猜到了呢？原来小羊头上是7。小马想：我头上既然不是6，他头上是7，我头上当然是

8啦！

小羊于是也明白了：他能从自己头上不是6就能猜到是8，当然是因为我头上是7罗！

实际上，即使两人头上写的是100和101，只要让两人对面反复交流信息，反复说“猜不到”，最后也总能猜到的。

这游戏，还有一个使人迷惑的地方：一开始，当小羊看到对方头上是8时，就肯定知道自己头上不会是1,2,3,4,5,6；而小马也会知道自己头上不会是1,2,3,4,5。这么说，两人的前几句“猜不到”，互通信息，肯定是没用的了。可是说它没用，又不对，因为少了一句，最后便要猜错。这里面，究竟是什么道理呢？你得仔细想想。

另一个游戏是：小牛偷偷在纸上写了一句话，这句话叙述一件事，请小马和小羊猜这句话叙述的事对不对。并且给两人各一张纸，要他们把所猜的结果写在纸上。

小牛说：你们两人中只要有一个猜中了，你们就胜了。晚上，我给你们唱一支好听的歌。都猜不中，你们输了，什么时候给我演个节目都行。

小羊说：我们一定有一个人猜得中。我猜你这句话说得对，他猜你这句话不对，总会有一个人猜中吧！

可是，结果还是小牛胜了。

原来，小牛写了这样一句话：

“你的纸上写的是‘不对’”。

小羊在纸上写的是“对”，这时，小牛这句话当然错了。可小羊猜“对”，当然猜不中了。

小马呢，他在纸上写的“不对”，这时，小牛这句话当然对。可小马猜“不对”，也没有猜中。

小羊和小马恍然大悟，说：“你就是把纸上的话给我们看了，我们也决不会猜中的啊！”

上面这两个游戏，都牵涉到一些逻辑推理中的怪现象，人们把它叫做“数学悖论”。怎样说明悖论？怎样消除悖论？是数学基础研究中的一件大事，很多人正在努力研究解决。

一板一眼推理

在报刊上，不时看到逻辑推理的趣题。等到看了答案后，往往又感觉失望。因为答案只是就事说个结论，没有给出解题的思路和方法，意义不大。

现在，从报刊上找来一个例子，把得出答案的来龙去脉分析一下，想来对你认识和解决这类问题有帮助。

老张、老王和小李，是一列客车的车长、司机和列车员，可不一定就是这个次序。车上有三位住在成都、南京和西安的乘客，分别和他们同姓，为了区别起见，不妨在乘客的后面添上“同志”二字。

已知下列事实：

一，李同志住在西安；

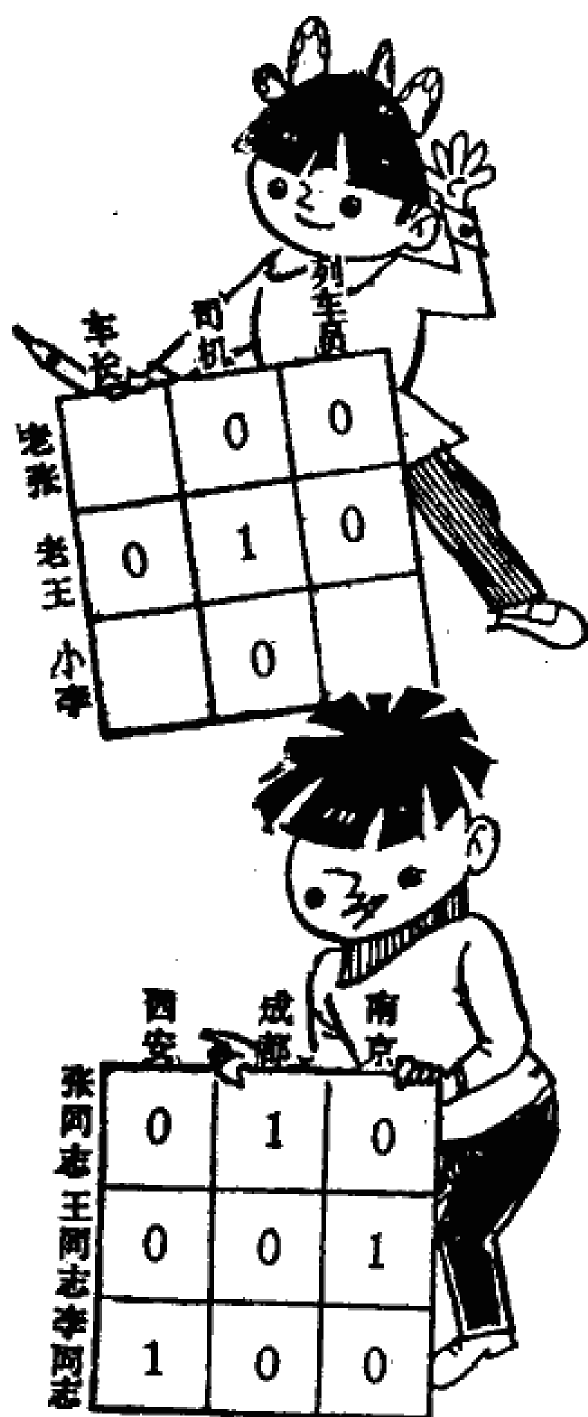
二，司机家住成都；

三，和司机同姓的乘客住在南京；

四，老张在乒乓球比赛中打败了列车员；

五，张同志和司机住在一条街上。

请问谁是车长、司机和列车员？三位乘客家住何处？



	车长	司机	列车员
老张		0	0
老王	0	1	0
小李		0	

	西安	成都	南京
张同志	0	1	0
王同志	0	0	1
李同志	1	0	0

这个问题里有6个人，要决定三人的职务和三人的住地，头绪交叉，容易弄错，用左边两个表来解决就方便了，清楚了。

按照所给的条件分析问题，每得出一个结论，便在表上记下来。记的方法是：要是肯定老王不是司机，便在老王这行与司机这列交叉处画个0；相反，便写个1。

注意。因为三位乘务员每个人只有一个职务，不同的人职务不同，所以在左上表的每行、每列中，都恰好只有一个1。三位乘客的住地，情况也是这样。

根据第一条，在李同志与西安交叉处写1；李同志这行另两处画0；西安这列另两处也是0。

根据第三条，可见司机不姓李，小李与司机交叉处也画上0。

根据第四条，老张不是列车员，在老张与列车员交叉处画个0。

根据第二和第五条，张同志住成都，在张同志与成都交叉处写上1。剩下来的，自然是王同志住在南京了。

由此可见，司机姓王，在老王与司机的行列交叉处写上1；这行、列的其它地方画上0。这时，老张那一行已有两个0了，剩下一个只有画上1。老张是车长，小李当然是列车员了。

这种表格在数学里叫做“矩阵”，很有用处。



他该住在哪里

话说阿布扎比是民族学院的一位学生。说来也巧，他有十二个不同年龄的同学，偏偏生肖刚好是鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、狗、猪，十二样生肖样样都有，既不重复，也无遗漏。这么一来，自然就可以用子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥，来代表这十二个人了。

学院的宿舍区里，有一条河滨马路，修得笔直，这十二个人的宿舍全都在那里，而且因为他们的年龄、籍贯和习俗都不一样，领导为了照顾他们，分配他们每人各住在一幢楼的一间宿舍里。他们的住处象一字长蛇阵那样摆开，如图分布在一条直线上。



阿布扎比同这十二人的关系都很好，课余之暇，他打算经常到他们的住处串串门，谈谈心。要是他到这十二人的住处的次数一样多，请问，他的宿舍应当选在哪里，他到各家去串门时，所走的路最少？

这个题目有些特别。十二个宿舍在图上是没有给出距离数的。这就是说，距离可大可小，随便怎么画都行。

解决这个问题，可以先看最外面的两家子和亥。要是只有这两家，那么，在马路上的什么地方，到这两家的距离的和最小呢？当然是子和亥中间的直线上的任何一点（包括子和亥在内），到这两家的距离的和最小。子亥这一段，在数学上名叫“区间”。

再看紧挨在它里面的一个区间丑戌。很明显，在丑戌这个区间内的任何一点（包括丑和戌在内），到这两家的距离的和最小。

现在，你大概已经察觉到：因为在丑戌区间内的任何一点，必然也位于

子亥区间内；所以，丑戌区间的点，到子、丑、戌、亥四家的距离的和，都是最小的了。

下一步该怎么办呢？想来你的心里已经亮堂了：再看位于丑戌区间里面的寅和酉，然后照此推理。

经过这样“层层剥笋”，直到最里面的一个区间巳午，于是，你就可以下结论说：在巳午区间的任何一点（包括巳和午在内），都是符合题目条件的。阿布扎比不妨直接搬进巳或者午的宿舍去住。

要是你以后再碰到这样的问题，不管人家是多是少，距离是大是小，道路是直是曲，都不需要作任何计算，就能断言：

一，当人家数是个偶数时，那可以搬到最中间的两家中的一家去住；

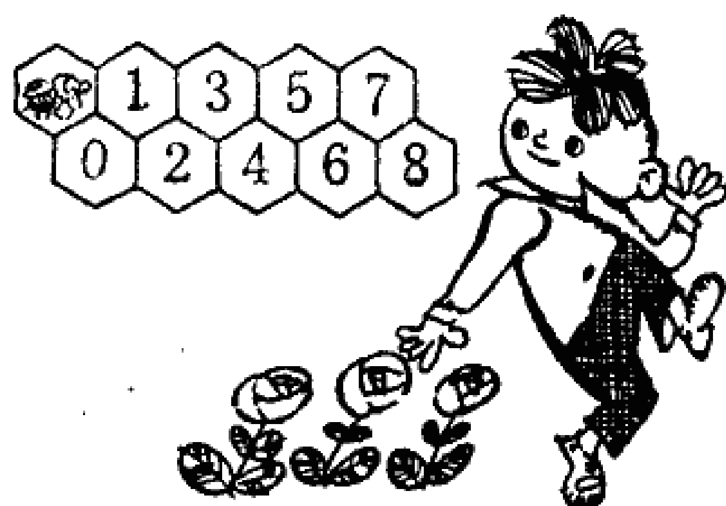
二，当人家数是个奇数时，这时必有一家的位置处在中心，那就只能搬进这家去住了。

要是你问：这十二个朋友不是住在一条线上，而是住在一条大道的一些分支上，阿布扎比又该住进哪个宿舍呢？

一般说来，解决这样的问题要困难得多。要是允许他在大道旁选个地点盖房子，这个问题又变得容易起来。你能找到答案吗？

小蜜蜂爬蜂房

这里有一排蜂房，编有号码如图。在蜂房的左上角有一只小蜜蜂，它还不能飞，可是会爬。



这只笨拙的小蜜蜂，在爬行时遵循一条死板的规则：任何时候，都只能向右方爬，从一间蜂房爬到相邻的右方蜂房中去，不能再爬回左边。

现在，请你想想看，蜜蜂要从最初的位置爬到8号房间，共有多少种不同的走法？

当房间号码少的时候，问题很好解决。可是，房间号码一多，不同的走法就非常多，很容易弄乱，也不容易把全部的答案都找出来。要想很好解决这样的问

题，得由简到繁，一步一步来。

很明显，按规则，蜜蜂从起点到0号房间只有唯一的一种走法，从起点到1号房间有两种走法。一种是直接走到1号，一种是从起点经过0号、再到1号。

同样的道理，蜜蜂从起点到2号房间的走法共有三种，就是起点→0→2，起→1→2和起→0→1→2。到3号房间的走法有五种，就是起→1→3，起→0→2→3，起→0→1→2→3，起→1→2→3，起→0→1→3。

现在，你不难看出，要是蜜蜂想到4号房间，那它在此之前，最后一个落脚点不是2号、就是3号。所以，蜜蜂到4号房间的不同走法的总数，肯定就是它到2号房间的不同走法的总数，再加上它到3号房间的不同走法的总数之和。

这样，你马上就能写出：蜜蜂到4号房间的不同走法的总数应当是3+5=8种。

根据这种推理，我们可以排出一个表格：

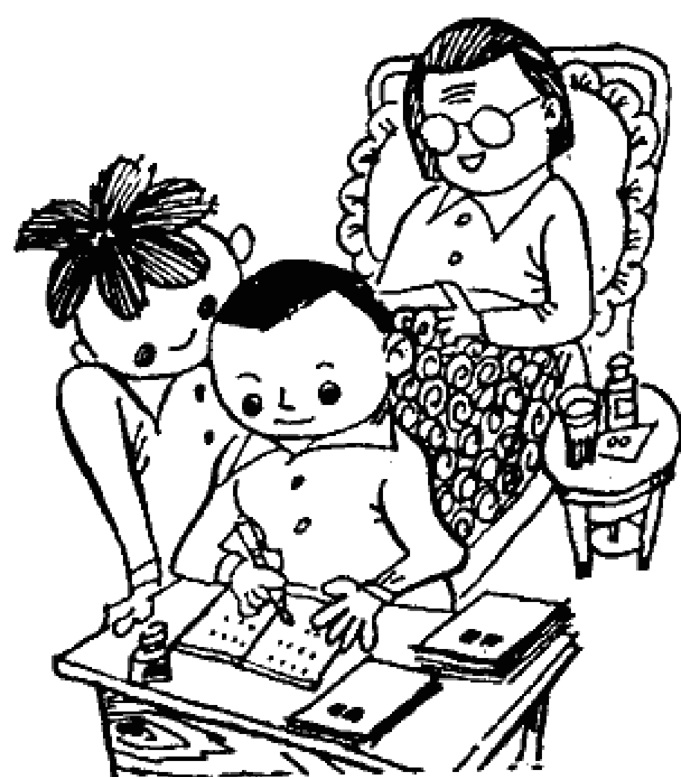
房间号码	不同走法总数
0	1
1	2
2	3　(1+2)
3	5　(2+3)
4	8　(3+5)

5	13	(5+8)
6	21	(8+13)
7	34	(13+21)
8	55	(21+34)

原来这只蜜蜂从起点到8号房间，共有55种不同走法。把这些不同走法的总数排成一串——1,2,3,5,8,13,21,34,55,在数学上是很有名的数列，叫做斐波那契数列。

斐波那契数列有许多美妙的特性。多少年来，华罗庚教授在各地推广的优选法，就常和这个数列打交道。可见它对经济建设有用处。

这个数列相邻两项的比，越来越接近那个大名鼎鼎的$0.618\cdots\cdots=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$；相连四项，两内项的积和两外项的积的差，总是±1。你能证明吧？



有趣的虫食算

无字天书，谁也看不明白。我们感兴趣的，是那些字迹虽然已经模糊不清，可是还有蛛丝马迹，依稀可辨的各种四则运算。日本的高木茂男，给它取了个形象的名字，叫做虫食算。

下面的两个除法算式，字迹已经完全不能辨认，只知道每个打“×”的地方，都是阿拉伯数字0，1，2，3，4，5，6，7，8，9中间的一个；还有左边第一式的商数，是右边第二式的被除数：

```
              ××××××              ×××××
×××)×××××××××             ××)××××××
     ×××                       ××
     ─────────                 ──────
        ××××                    ×××
         ×××                     ××
        ──────                  ─────
          ×××                    ×××
          ×××                    ×××
          ────                   ────
          ××××                    ×××
          ××××                    ×××
          ════                   ════
```

这两个全部数字都被虫吃掉的算式，只在有数字的地方留下一个痕迹，要把这些数字全部找回来，好象很难，其实不难。

一，容易看出，第一式的被除数的第一位数字一定是 1 。不这样，相减后不会得 0。同理，它的第四行的第一位数字也是 1 。

二，第一式的第四行，一下子从被除数中移下三个数字，可见商的第二、第三位数字都是 0。

三，再看第一式的第四行，可判定被除数的第二、第三位数字，只可能都是 0。因为有一个是 1 或者大于 1 ，那相减的结果，就不可能缩进去两位。

四，因为第一式的第四行的首位数字是 1 ，所以可知被除数的第四位数字一定是 0。不这样，相减后，就不能得 1 了。既然被除数的前四位数是 1000，它减去一个三位数得 1 ，可见第三行的三位数字是 999。此

外，因为第四行减第五行的差是两位数，所以第四行的第二位数字是 0。

五，第三行是 999，可见除数只可能是 111 或者 333、999。要是 111，那它乘上 9 也只有三位数字，而第九行是四位数字，可见不行。要是 999，第六行最大是 999，第七行又只能是 999，相减后，第八行就没有了，可见也不行。于是，肯定除数是333。这样，又可以进一步肯定商的首位和第四位都是 3，第五行是999。

六，已知第一式的商数，就是第二式的被除数。现在，在第二式的被除数中，先填上 3003。因为第二式的第四行是个三位数，第五行是个二位数，所以可以肯定第四行的首位数字是 1，并且可以肯定第三行是29。29 是质数，又可以肯定除数是 29，商的第一位是 1，第二位是 0。

七，由第二式的 3003 和 29，可以求出它的商的第三位数字是 8，第五行是 87。

八，在第一式里，第六行是三位数，所以商的第五位数字不是 2、就是 1。要是 1，那第二式就不能整除了。所以它只能是 2。然后从第二式中，可知第一式的商是 300324。

推算到这里，其余的数字就容易求出来了。这个虫食算的本来面目是：

```
          300324
333 ) 100007892
      999
      ----
       1078
        999
       -----
         799
         666
        -----
         1332
         1332
         ====
```

```
        10356
29 ) 300324
     29
     ----
      103
       87
      ----
       162
       145
       ----
        174
        174
        ===
```

用话说相当噜苏。你有兴趣，也可以把这两个算式的“×”，全部换成英文字母，然后用不等式来解：

$$
\begin{array}{r}
c_1c_2c_3c_4c_5c_6 \\
a_1a_2a_3\,\big)\,\overline{b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9} \\
\underline{d_1d_2d_3\quad\quad\quad\quad} \\
\quad e_1b_5b_6b_7 \\
\underline{f_1f_2f_3\quad} \\
g_1g_2b_8 \\
\underline{h_1h_2h_3} \\
i_1i_2i_3b_9 \\
\underline{\underline{i_1i_2i_3b_9}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
B_1B_2B_3B_4B_5 \\
A_1A_2\,\big)\,\overline{C_1C_2C_3C_4C_5C_6} \\
\underline{D_1D_2\quad\quad\quad\quad} \\
E_1C_3C_4 \\
\underline{F_1F_2\quad} \\
G_1G_2C_5 \\
\underline{H_1H_2H_3} \\
I_1I_2C_6 \\
\underline{\underline{I_1I_2C_6}}
\end{array}
$$

这样换成字母，解题时就不用说一式、二式和哪一行、哪一位数字了。例如：

$\because e_1b_5b_6b_7 = g_1g_2 + f_1f_2f_3$，

$\because g_1g_2 \leqslant 99$， $f_1f_2f_3 \leqslant 999$；

$\therefore e_1b_5b_6b_7 \leqslant 99 + 999$，

$\therefore e_1 = 1$。

虫食算里的一些题，因为格外有趣，有的在历史上还有点小名气。举两个例子。一个叫做七个 7 的难题：

```
                ××7××
××××7× ) ××7×××××××
          ××××××
          ×××××7×
          ×××××××
            ×7××××
            ×7××××
            ×××××××
            ××××7××
              ××××××
              ××××××
```

这个题只有一个答案：

7375428413÷125473＝58781。

另外一个叫做四个 4 的除式之谜：

```
          ×4××
××× ) ××××××4
        ×××
        ××4×
        ××××
         ××××
          ×4×
          ××××
          ××××
```

这个题有四个不同的答案，它们是：

1337174÷943=1418；

1343784÷949=1416；

1200474÷846=1419；

1202464÷848=1418。

在上面这些例子中，算式中的未知数字，不分青红皂白，一律都用记号“×”来表示。可是有的虫食算，要是用字母代替数字，并且用相同的字母代表相同数字，区别对待，可以使题目变得容易一些。

令人感兴趣的，是这样用字母来作虫食算，有时会出现一些有意义的句子，一语双关。高木茂男收集到许多这样的例子。下面，随便举出一些：

(1)
```
   CROSS
 + ROADS
 -------
  DANGER
```
(十字路口危险)；

(2)
```
   MONEY
 -  SEND
 -------
    MORE
```
(送更多钱)；

(3) HE × WAS = HERE (他曾在这里)；

(4) I = SWIM + WELL (我游得好)；

(5)
```
   ZERO
    ONE
 +  TWO
 ------
  THREE
```
(0 + 1 + 2 = 3)。

高木茂男懂中文，他能用中国的古诗来制作虫食算。请看：

(6)　年年×岁岁＝花相似；

岁岁÷年年＝人÷不同。

下面，是这些虫食算的答案：

(1)
$$\begin{array}{r} 96233 \\ +62513 \\ \hline 158746 \end{array}$$
；

(2)
$$\begin{array}{r} 10652 \\ -\ 9567 \\ \hline 1085 \end{array}$$
；

(3)　$25\times103=2575$；

(4)　$3=6231\div2077$；

(5)　有两解：

$9635+586+145=10366$，

$9635+546+185=10366$。

(6)　$44\times22=968$；

$22\div44=5\div10$。

要创作和解答这样的虫食算相当费事。你不妨动手试一试。



在速算的背后

速算，看起来使人惊奇。弄清了它的根底，原来十分平常。

两数相乘，要是都是比100略小的数，例如98×93，懂得窍门的人，可以应声说出它的答案：9114。一算，确实不错。

怎么速算的呢？

容易看出，98×93的积是4位数；98对100的补数是2，93对100的补数是7。用98减去93的补数7，或者用93减去98的补数2，得91，这就是答案的前两位；两补数相乘，2×7=14，这就是答案的后两位。

要是两补数相乘得到的是一位数，就在前面补个0，凑够两位；要是得到的是三位数，就进上一位。98×97＝9506，95＝98－3，06是由2×3＝6凑0得到的；86×92，86－8＝78，14×8＝112，结果是7912。

这两步，说起来有点噜苏，用起来是非常干净利落的。

比1000或者10000，100000，……略小的数相乘，都可以如法炮制。

为什么可以这样算呢？

两个数都比100或者1000，10000，……略小一些，就一定可以用10^n-a和10^n-b来表示，这里的n、a和b都是自然数，得到

$$(10^n-a)(10^n-b)=10^n(10^n-a-b)+ab。$$

右边第二项ab，显然就是两个补数的乘积。右边第一项里的10^n-a-b，可以看作$(10^n-a)-b$，或者$(10^n-b)-a$，这正是一个乘数减去另一个乘数的补数；10^n是添0数，是定留空位数的。

速算之所以能成功，就因为它是建立在恒等式的基础上的！

从速算背后，捉到了隐藏的恒等式，不要轻易放掉了它。在这里头，还可能找到更多的窍门。

你看，在恒等式

$$(10^n - a)(10^n - b) = 10^n(10^n - a - b) + ab$$

中，把“-”换成“+”，它也对。

$$(10^n + a)(10^n + b) = 10^n(10^n + a + b) + ab。$$

这样，又学会了两个都比 100 或者 1000，10000，……略大的数相乘的速算法了。

1045×1006，

1045+6=1051，补三个 0 是1051000，

45×6=270，结果是1051270。

能把这两个速算法统成一个吗？

能。这只要推广一下补数的概念就行了。通常，比 100 小的数，例如 95，它补上 5 就是 100，所以 5 叫做 95 的补数。那么，105 要补上多少才是 100 呢？只要补上 -5 就行了。

这么说，比 100 略大的数，它的补数是负数。

可不是吗，100-a 是 a 的补数，a 比 100 大，补数是负的，完全合理。

补数可以是负数，那开头说的方法，就不只可以用于两个略小于 100 或者 1000，……的数相乘，也可以用于两个略大于 100 或者 1000，……的数相乘。这时，减去另一数的补数，因为补数是负的，实际上是加上一个正数。两个补数相乘，在补数是负的情况下，负乘负得正，后头部分也是正的！

再一想，两数相乘，要是一个比100或者1000，……略大，另一个略小，这个方法也是可以用的。

995×1046，　$1046-5=1041$，

$5\times(-46)=-230$，　$1041000-230=1040770$。

这就是答案。你不妨验算一下。

这样看来，我们要两个数与100或者1000，……很接近，这个条件，在那个恒等式里并不需要，只是速算的目的要我们这样做！实际上，随便两个数相乘，都能用这个方法。例如57×34，这里的补数是43和66，$34-43=-9$，补两个0是-900，$43\times66=2838$，$-900+2838=1938$，这就是答案。

这样做，结果倒不错，可是比普通的算法还麻烦，就不是速算了。



在这个速算法的背后，躲着一个恒等式，那么，是不是在别的恒等式背后，也藏着别的速算法呢？

确实是的。

根据 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，

$603\times597=(600-3)(600+3)=360000-9=359991$；

$78^2-77^2=(78+77)(78-77)=155$。

根据 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a(a+2b)+b^2$；

$25^2=2\times300+25=625$；

$75^2=7\times800+25=5625$。

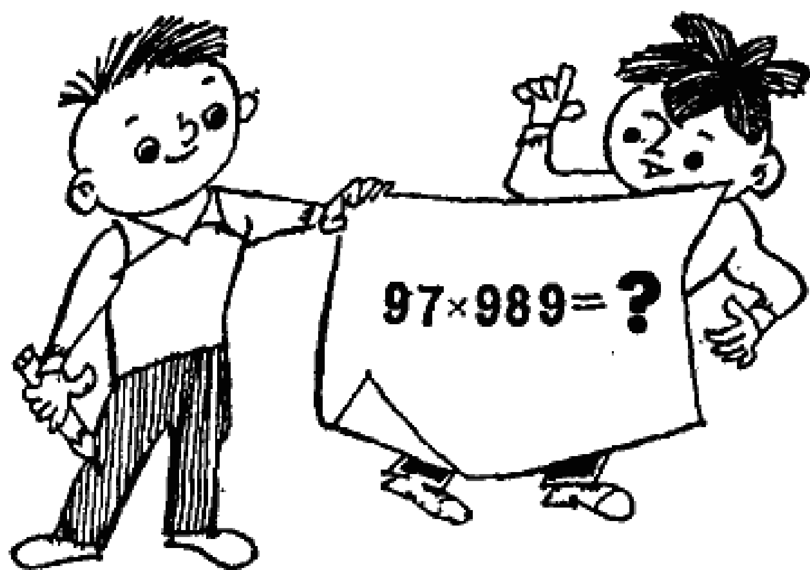
把它推广一下，由

$(a+b)[a+(10-b)]=a(a+10)+b(10-b)$，

可以计算两个10位数相同、个位数互补的数相乘。

$76\times74=7\times800+4\times6=5624$。

最后，建议你想一下，97×989 能不能速算？背后躲着哪个恒等式？



$1 \cdot 1 =$

$11 \cdot 11 = 121$

$111 \cdot 111 = 12321$

$1111 \cdot 1111 = 1234321$

$11111 \cdot 11111 = 123454321$

$111111 \cdot 111111 = 12345654321$

$1111111 \cdot 1111111 = 1234567654321$

$11111111 \cdot 11111111 = 123456787654321$

$111111111 \cdot 111111111 = 2345678987654321$



用数建造宝塔

形体各异，千姿百态的宝塔，是我国古代文明的瑰宝。

在民间文学里头，有一种“宝塔诗”，至今还是大家喜闻乐见的形式。

在晚会上，用英语单词造宝塔的游戏受到欢迎。这种宝塔可以高到十几层。例如：

I （我）

IS （是）

ICE （冰）

IRON	(铁)
IDEAL	(理想的)
INCOME	(收入)
IRELAND	(爱尔兰)
IDENTITY	(恒等式)
IMAGINARY	(幻想的)
IMPRESSION	(印象)
ICOSAHEDRON	(二十面体)

北宋的科学家沈括，在酒店里看到一坛坛的酒，象宝塔那样堆放得整整齐齐，不禁触景生情，发现了"垛积术"。后来，元代的朱世杰进一步加以研究，得到了世界上最早的高次等差级数的求和公式。这在科技史上，是一项重要的成就。



法国数学家路加，对数的宝塔特别有兴趣，他收集

和研究了大量的例子。下面列举的，只是其中的一些例子。

$$1\cdot 9+2=11$$
$$12\cdot 9+3=111$$
$$123\cdot 9+4=1111$$
$$1234\cdot 9+5=11111$$
$$12345\cdot 9+6=111111$$
$$123456\cdot 9+7=1111111$$
$$1234567\cdot 9+8=11111111$$
$$12345678\cdot 9+9=111111111$$
$$123456789\cdot 9+10=1111111111$$

$$0\cdot 9+8=8$$
$$9\cdot 9+7=88$$
$$98\cdot 9+6=888$$
$$987\cdot 9+5=8888$$
$$9876\cdot 9+4=88888$$
$$98765\cdot 9+3=888888$$
$$987654\cdot 9+2=8888888$$
$$9876543\cdot 9+1=88888888$$
$$98765432\cdot 9+0=888888888$$

利用算盘或者袖珍电子计算器，可以帮助你造数的宝塔，欣赏这种宝塔的和谐美。

这两个宝塔也很有趣：

$$12345679 \times 9 = 111111111$$
$$12345679 \times 18 = 222222222$$
$$12345679 \times 27 = 333333333$$
$$12345679 \times 36 = 444444444$$
$$12345679 \times 45 = 555555555$$
$$12345679 \times 54 = 666666666$$
$$12345679 \times 63 = 777777777$$
$$12345679 \times 72 = 888888888$$
$$12345679 \times 81 = 999999999$$

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

和这些宝塔比，别具一格的是：

$$1=\frac{1\times 1}{1}$$

$$121=\frac{22\times 22}{1+2+1}$$

$$12321=\frac{333\times 333}{1+2+3+2+1}$$

$$1234321=\frac{4444\times 4444}{1+2+3+4+3+2+1}$$

$$123454321=\frac{55555\times 55555}{1+2+3+4+5+4+3+2+1}$$

$$12345654321=\frac{666666\times 666666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}$$

$$1234567654321=\frac{7777777\times 7777777}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1}$$

$$123456787654321=\frac{88888888\times 88888888}{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}$$

$$12345678987654321=\frac{999999999\times 999999999}{1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1}$$

以上的宝塔都只有九级，不能再继续造下去了。这是因为受到十进位记数法的限制。不过，也有许多数

的宝塔，它们是可以无限制地造下去的。例如：

$7\cdot 7=49$　　　$4\cdot 4=16$

$67\cdot 67=4489$　　　$34\cdot 34=1156$

$667\cdot 667=444889$　　　$334\cdot 334=111556$

……………………　　　……………………

$7\cdot 9=63$　　　$9\cdot 9=81$

$77\cdot 99=7623$　　　$99\cdot 99=9801$

$777\cdot 999=776223$　　　$999\cdot 999=998001$

……………………　　　……………………

最后，让我们来造一个大宝塔：

$$1\cdot 7+3=10$$
$$14\cdot 7+2=100$$
$$142\cdot 7+6=1000$$
$$1428\cdot 7+4=10000$$
$$14285\cdot 7+5=100000$$
$$142857\cdot 7+1=1000000$$
$$1428571\cdot 7+3=10000000$$
$$14285714\cdot 7+2=100000000$$
$$142857142\cdot 7+6=1000000000$$
$$1428571428\cdot 7+4=10000000000$$
$$14285714285\cdot 7+5=100000000000$$
$$142857142857\cdot 7+1=1000000000000$$

……………………………………………

你看，左边的142857，就是$\frac{1}{7}$的循环小数，它和被加上去的数——3，2，6，4，5，1，都是周而复始，不断地重复出现的！

造宝塔、看宝塔是有趣的。要是你进一步，弄清楚为什么会出现这些千姿百态的宝塔，那就更有趣了！

最后的这个大宝塔，每个等式用7除一下，再移项，把$\frac{3}{7}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{6}{7}$，…移到右边，便可看出它的成因是什么了。

这前面的一个宝塔等式中，$999\times999=998001$，不正是上一节讲的速算法吗？

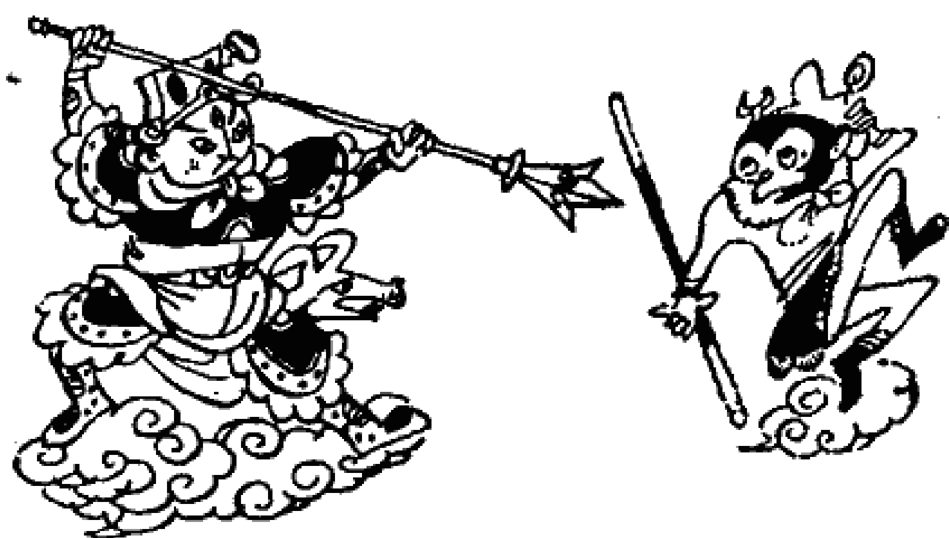
又一个，$777\times999=776223$，也是从这个速算法得来的。类似的，还有$888\times999=887112$之类。

再前面一个，$4\times4=16$，$34\times34=1156$，……看来似乎难于解释，可是只要把某一行两端乘以9，原来也是这个速算法的一个特例：

$34\times34\times9=102\times102=10404=9\times1156$；

$334\times334\times9=1002\times1002=1004004=9\times111556$。

你看，数的宝塔使人惊奇，拆开，不过是普通的“砖石”罢了！



循环节的长短

你看过《西游记》吗？

在和齐天大圣孙悟空打过仗的天兵天将中，最有本领的，恐怕要算二郎神了。

孙悟空拔出一撮毫毛，就会变出千千万万个小孙悟空。二郎神也有这种本领。以千千万万来对付千千万万，当然就杀得难解难分了。

以上说的，只是一个引子。下面，来说一说算术里头的循环小数。

1，2，3，……是正整数。两个正整数相除，只有两种可能，要么除尽，要么除不尽。在除不尽的情况

下，商数就是一个循环小数了。

$2 \div 5 = 0.4$;

$2 \div 3 = 0.666\cdots\cdots$

$1 \div 37 = 0.027027027\cdots\cdots$

为了方便，可以把$\frac{1}{37}$记成$0.\dot{0}2\dot{7}$，表示循环节有三位数字。它周而复始，不断出现。其他循环节，也可以如法炮制。

一切循环小数都是有理数。其实，能除得尽的有限小数，也可以表示为循环小数。例如：

$0.4 = 0.3999\cdots\cdots = 0.3\dot{9}$。

不过，从来没有人这样写就是了。

数学家已经造出了一张长长的表，下面是100以内的质数，把它们的倒数化为循环小数时，循环节所含有的位数：

质　数	倒数循环节的位数	质　数	倒数循环节的位数
3	1	47	46
7	6	53	13
11	2	59	58
13	6	61	60

17	16	67	33
19	18	71	35
23	22	73	8
29	28	79	13
31	15	83	41
37	3	89	44
41	5	97	96
43	21		

你看，把$\frac{1}{97}$化为循环小数时，它的循环节有 96 位。要把它们都算出来，那是很费时间的。不过，和下面的计算一比，它又显得微不足道了。

有个名叫赫德逊的人，曾把$\frac{1}{1861}$的循环节全部算出来，它共有 1860 位。更不怕麻烦的是向克斯，他把$\frac{1}{17389}$的由17388 个数码所构成的循环节，一个不漏地全部算了出来。

$\frac{1}{7}$的循环节 142857，是个很有趣的数。要是把它分别乘以 2，3，4，5，6，你会看到：

$142857 \times 2 = 285714$;

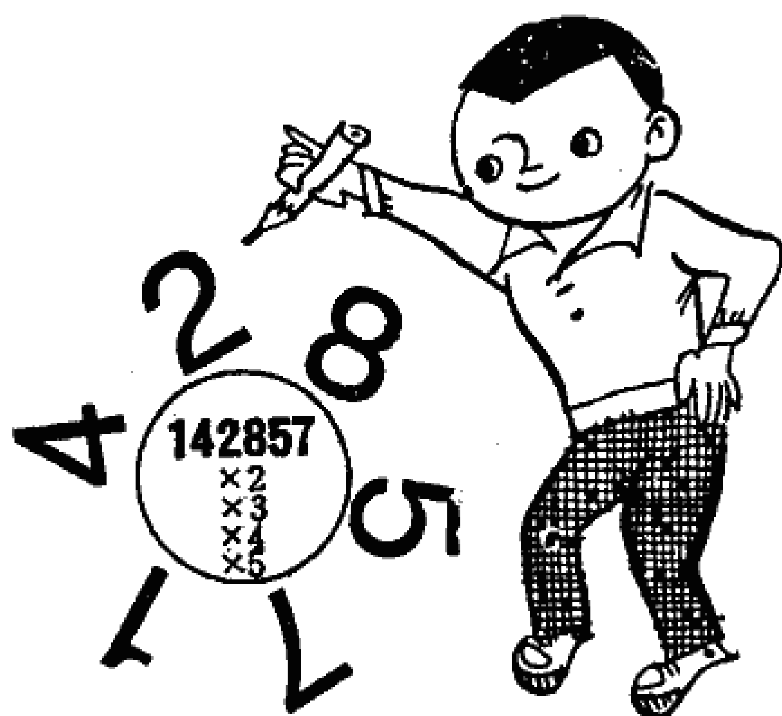
$142857 \times 3 = 428571$;

$142857 \times 4 = 571428$;

$142857 \times 5 = 714285$;

$142857 \times 6 = 857142$。

所得到的乘积，都是由这 6 个数字组成，并且内部的顺序也保持不变，只不过象走马灯那样转圈子罢了。



要是把这六个数字，依转圈顺序分成两组，每组各有三个数字，你又会看到：在每两组中，相应的前后两个数字的和都是 9 。例如：$857 + 142 = 999$。

这种走马灯式的数，不只$\frac{1}{7}$的循环节是这样，$\frac{1}{97}$的

九十六位循环节也有这个特性。

为什么循环节有长有短，变化万千？

要弄清楚这个问题，得先弄清楚两个问题：一个是自然数相除，在除不尽的时候，为什么总会出现循环小数？一个是循环小数，为什么总能化为分数？

头一个问题，比较容易明白。用一个数除一个数，比如 313 + 29，除不尽，就有余数；余数补 0 再除，又有余数。余数总比 29 小，从 1 到 28，只能有 28 种不同的余数。一次一次地除，超过了 28 次，其中至少有两次的余数相同。于是，这两次的商也相同，这两次余数的后两个余数也相同，除得的商，就要循环。而且，循环节的长度，最多是 28。

第二个问题，循环小数化分数，这个方法大家都会。只要取整整一个循环节作分子，用 99…9 作分母就行了。这里，循环节有几位，就连写几个 9 。

$$0.378378378\cdots\cdots=\frac{378}{999}=\frac{14}{37}。$$

这里面的道理，也许你说不清。其实也简单，不过是一个方程问题。

设 $0.378378378\cdots\cdots=x$。

两端乘 10^3，得 $378.378378\cdots=1000x$，

所以，$378+0.378378\cdots=1000x$。

可是，$0.378378\cdots\cdots=x$，

所以，$378+x=1000x$。

解得　$x=\frac{378}{999}=\frac{14}{37}$。

这个方法，对别的循环小数化分数也用得上。因为上面举的循环小数，循环节是 3，所以列方程一开始，用 10^3 乘两边。要是循环节是n，就用 10^n 乘。这样，分子上有多长的循环节，分母上就是多少个 9。

说到这里，为什么循环节有长有短，变化万千这个问题，也容易明白了。还用刚才的例子来看：

$$\because\quad \frac{378}{999}=\frac{14}{37},$$

$$\therefore\quad 378=\frac{999}{37}\times 14。$$

因为14 和 37是互质数，也就是除 1 之外，没有公约数，所以 999 一定能被 37 整除。$999\div 37=27$，$27\times 14=378$。

从这里看出一个规律：要是既约分数$\frac{q}{p}$可以化成循环小数$0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_n$，那么，p一定能整除$10^n-1=\underbrace{999\cdots9}_{n个}$，而且把除得的商乘q，得到的就是一个循环节

的数字。

可见，只要p能整除连写的n个9，而且9的个数再少写就不能整除了，那么，$\frac{q}{p}$的循环节长度就是n。

连写三个9，可以被37整除，再少就不行了，那么，$\frac{q}{37}$的循环节一定是3位。

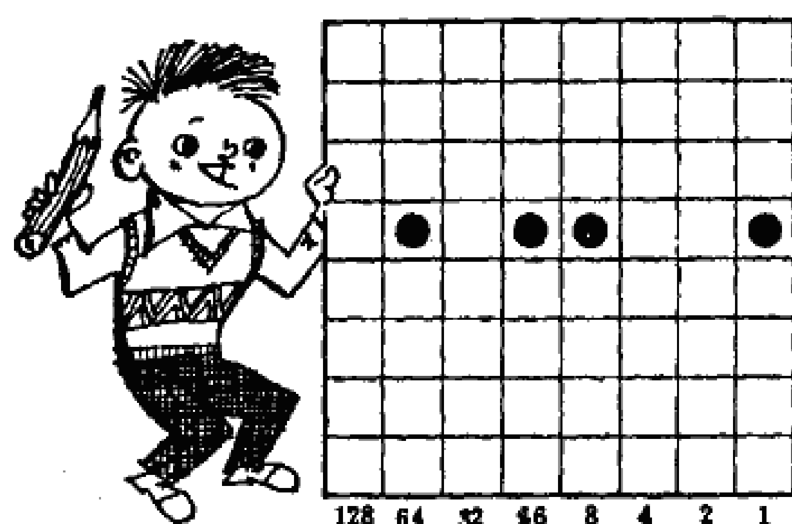
是不是连着写很多9，这样的数一定能被一切整数整除呢？

不见得。连写多少9，就不能被2整除，也不能被5整除。这很明白。可见，它不能被偶数、末位是5的数整除。

这告诉我们：任何一个既约分数$\frac{q}{p}$，要是它的分母p是偶数或者末位是5时，$\frac{q}{p}$是不能化成纯循环小数的！例如

$$\frac{1}{6}=0.166666\cdots\cdots$$

它不是一开始就循环的。它的循环部分是0.1×0.6，而$0.\dot{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$。这时，分母已不是偶数了。



方格子计算器

用纸画一张8×8的方格子，这就是去掉了“河界”的象棋棋盘，可以用来做加法和乘法的运算。

在棋盘的下方边沿外写上一些数：最右面一格写1，以后每格都顺次加倍。

在棋盘的左方边沿外，按格写上一些你打算进行运算的数。

然后，把它们按照2的各次方幂进行分解后，在相应的空格里放上一枚棋子。例如89＝64＋16＋8＋1，就在右起第一、第四、第五和第七格里，各放入

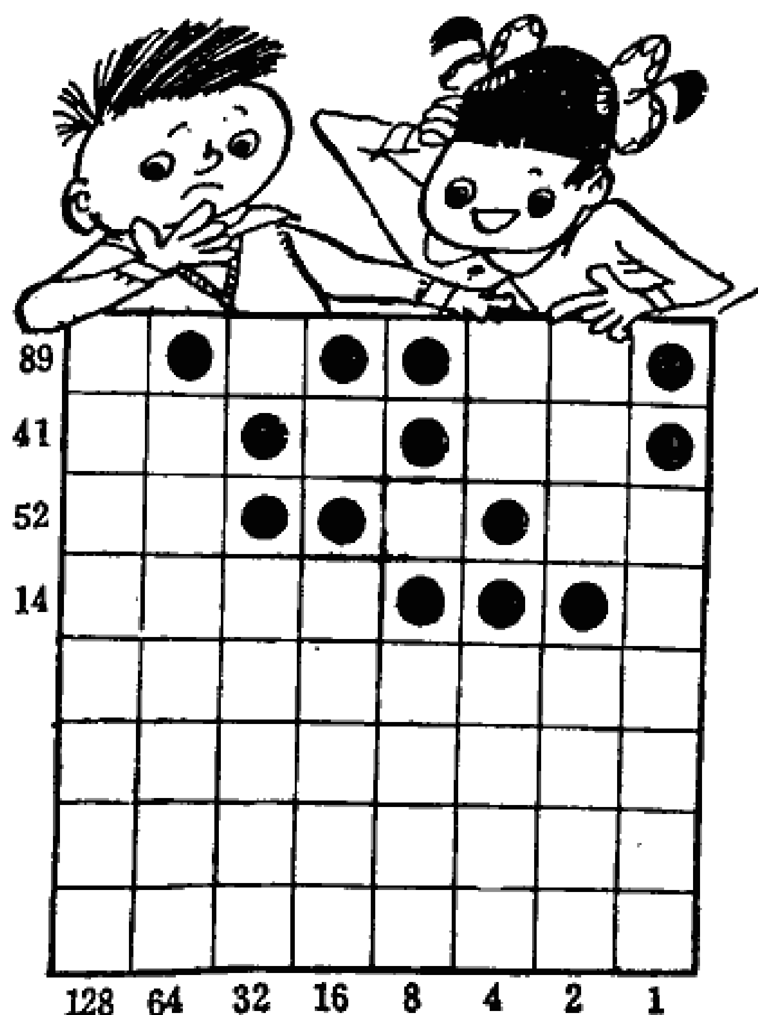
一枚棋子。这个摆法，实际上就是数的二进制记法，也就是十进制的89,等于二进制的1011001，可以写成$89_{(十)}=1011001_{(二)}$。

那么,怎样来做加法呢?

办法简单得很。如图,要运算

89+41+52+14,

只要把每个数按上面说的方法把棋子摆好，然后用象棋“车”的走法,一步直走到底格;再用逢二进一的办法,清理盘面就行了。当棋盘的每一格里有两枚以上



的棋子时，就每拿掉两枚，在上一格里放上一枚，依次执行。最后是核算总数。

凡是棋盘的格子里有一枚棋子的，就把与它相应的、棋盘下面边缘的 2 的方幂数相加起来。也就是：

128＋64＋4＝196。

128 64 32 16 8 4 2 1

于是，我们看到这只棋盘出色地完成了加法：

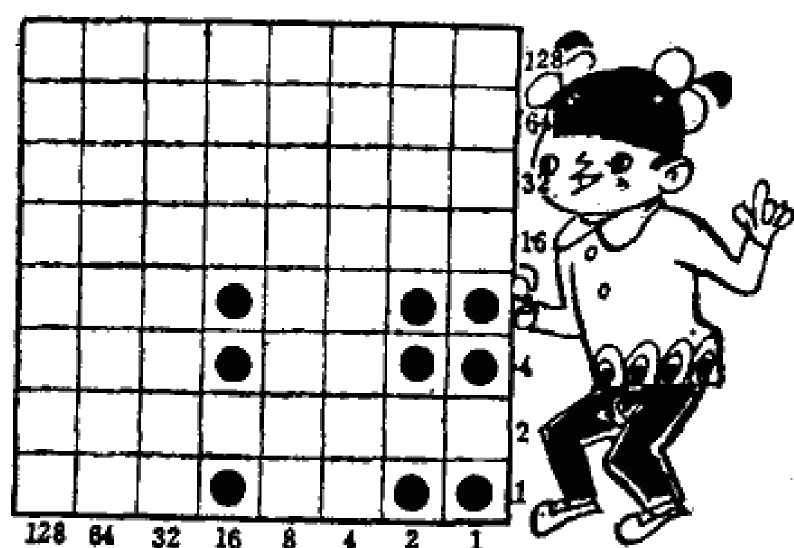
89＋41＋52＋14＝196。

用这个棋盘做乘法也很简单。例如19×13。

在做乘法时，不只要在棋盘的下方边沿，而且也要在右方边沿，填上一些2的整数次幂。然后，把被乘数与乘数分解成

19＝16＋2＋1， 13＝8＋4＋1

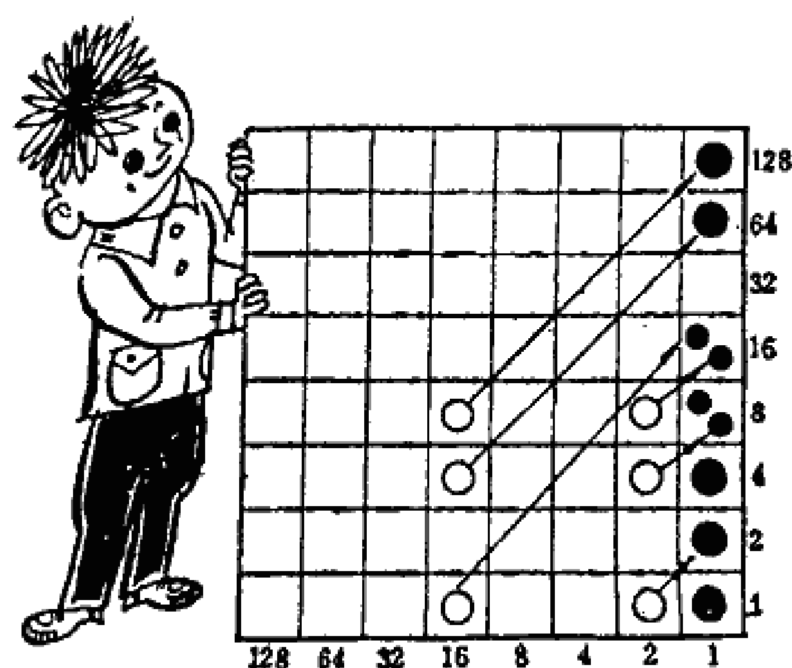
后，按16×8，16×4，16×1等，分别在16和8、16和4、16和1等相交的格子里，都放上一枚棋子如图。然后，



把棋盘里的每枚棋子，都一步斜走到最右边的一列里去如下页图。

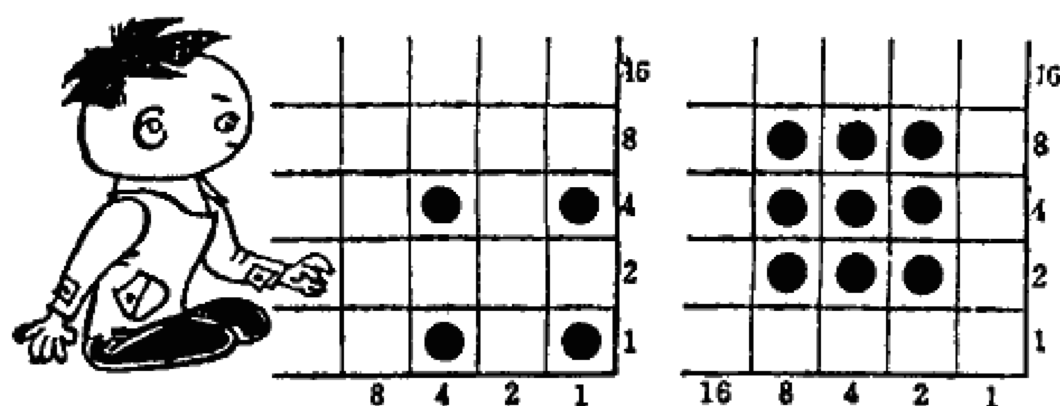
以下的步骤，也是先按照逢二进一的原则清理棋盘面，再核算总数。

经过核算，我们最后得到的数，相当于十进制中的247，这就是19与13的乘积。



因为减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算，所以这种棋盘也可以用来做除法与减法。你有兴趣，请想一想其中的道理，再动手试一试。

开方开得尽的自然数，叫做完全平方数。这类数摆在棋盘上是对称的，很好看。比如 25 和 196：



利用这种美丽的对称形状，可以在棋盘上开平方。这下子，加、减、乘、除、乘方、开方，都可以用这种棋盘

来做。

美国计算机科学家克努斯，对这种棋盘计算器很有兴趣。他想出了不少变通办法，其中的一种是交替二进位数，就是在边沿外写上 $+1-2+4-8+16-32$ ……这样，任意一个正数或者负数，都可以用交替二进位数唯一地表示出来。例如：

$13_{(十)}=11101_{(交二)}$　　$(=16-8+4+1)$；

$-13_{(十)}=110111_{(交二)}$　　$(=-32+16+4-2+1)$。

这种记法的一个明显的优点，是全然不需要在数的前面再安放上正号或者负号了。

下面，我们用克努斯的改进棋盘来做 $(-4)\times(-6)$：

$-4=-8+4$，　　$-6=-8+4-2$。

我们把它的图在下一页画出来，只要你弄懂了前面说的道理，一看就明白了。

$64-32-8=24$，这就是 $(-4)\times(-6)=24$。

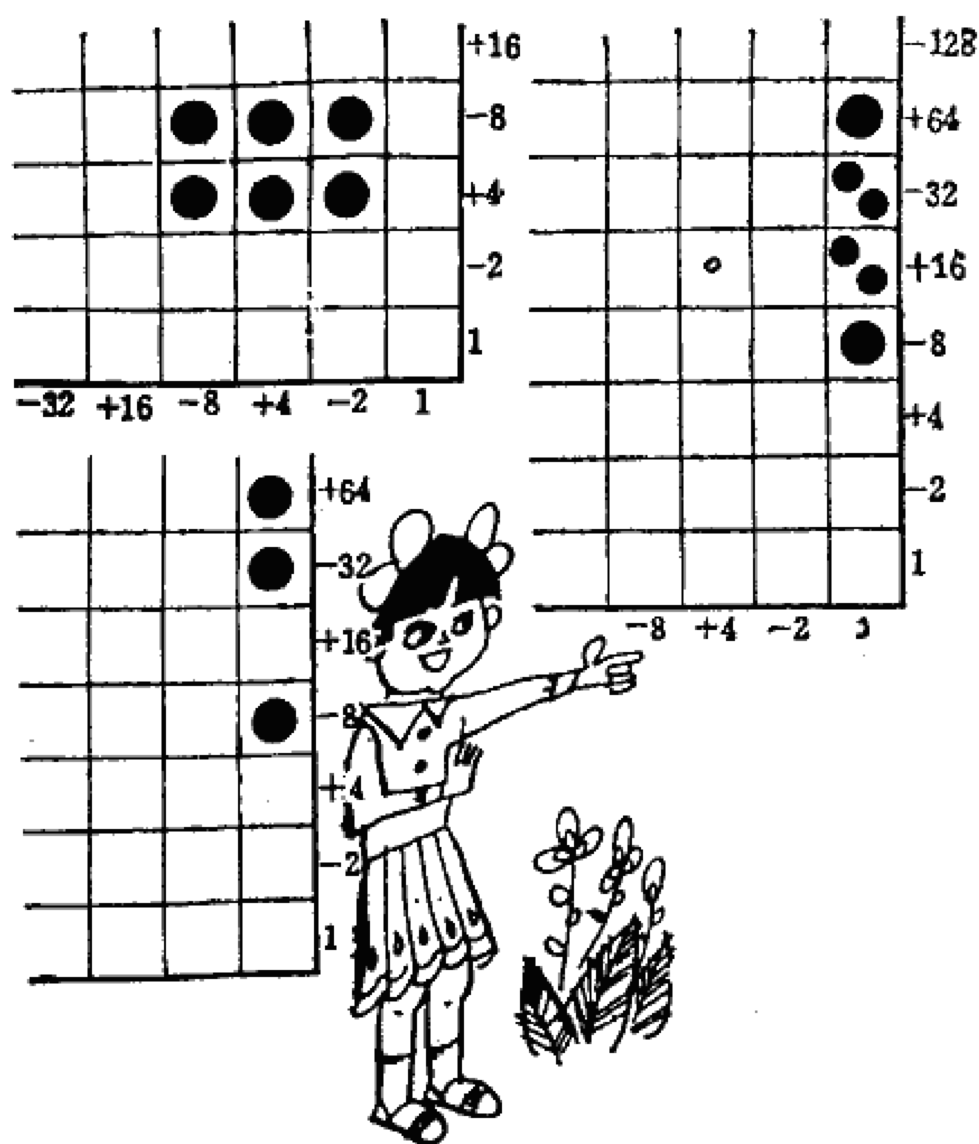
可见利用这种棋盘计算器，连代数上所说的负乘负得正，也得到了反映。

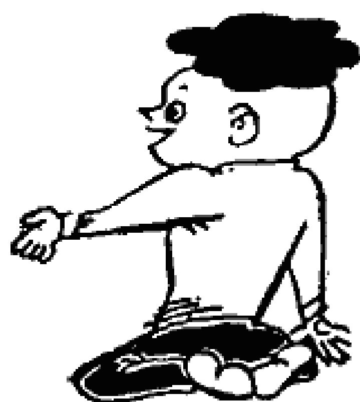
你也许会提意见：一般的四则运算，做起来十分容易，干么要用棋盘计算器呢？

这样的看法不对。你想，数学和下棋，都是人创造出来的智力活动，揭示它们之间的联系，不是很有意思

的事吗？

有趣的是，前不久，有人用这种棋盘证明了法国数学家费尔马的一个定理，引起了人们的议论和重视。





神秘的自守数

第一次听说神秘的自守数，你可能感到有些古怪和拗口。说清楚了，并没有什么难懂的东西在里头。

5和6就是自守数。你看：

$5^2=25$；　　$6^2=36$。

这两个数平方的结果，末尾仍然是5和6。不仅如此，任何两个整数相乘，只要它们的末位数都是5或者6，那么，乘积的末位数也必然仍旧是5或者6。例如：

$65\times45=2925$；　　$116\times46=5336$。

说5和6是自守数，就是说它们有这样的特性。

1和0也有这样的特性，一一得一，00得0，这是明摆着的。在一位数中，要是不算1和0，那就只有5

和 6 是自守数了。

76 是一个两位数的自守数。因为

$76^2=5776$；

而且任何两个以 76 结尾的自然数相乘，它的乘积也必然以 76 结尾。例如：

$576\times876=504576$。

要是你乘这样的数，积的末两位不是 76，那肯定就是做错了。不过，积的末两位是76，并不能保证被乘数和乘数的末尾是 76。例如：$106\times96=10176$。

在两位数中，还有一个 25 是自守数。此外，就没有两位的自守数了。不信，你可以试一试。

三位数有自守数吗？

有。而且三位的自守数，也刚好有一对，它们是 625 和 376。

那自守数的位数是不是没有尽头了呢？

对。自守数的位数不受限制，没有尽头。加拿大有两位数学工作者利用电子计算机，已经算出了有五百位的自守数。

五百位太多了，写出来要印满一页。下面两个一百位的自守数，是美国的加德纳在一篇文章中介绍的：

3953007319108169802938509890062166509580863811
000557423423230896109004106619977392256259918212

890625；

6046992680891830197061490109937833490419136188999442576576769103890995893380022607743740081787109376。

这么大的自守数，是怎么找到的呢？

说起来，这个办法很简单。只要x^2-x能被$10, 10^2, 10^3, \cdots 10^n$整除，求出其中的x就行了。

你要找一位的自守数，只要找到这样的一位数x，它使x^2-x能被10整除就行了。很明显，这样的x只有三个：1，5，6。

求两位的自守数，只要找到两位数x，它使x^2-x能被10^2整除就行了。这样的x只有两个，就是25和76。

这样的x怎么找呢？一个一个试吗？三位数有900个，四位数有9000个，要算多少次啊。有没有更简单的办法呢？

有。这办法，就是由小到大，一步一步地去找。

你想，要是abcd是四位的自守数，bcd是不是三位的自守数呢？一定是的。我们知道了三位自守数只有625和376，要找四位自守数，只有在a625和a376这种数里去找了。即使一个一个地试，至多试二十次，也就把所有的四位自守数都找出来了。

再试二十次，所有的五位自守数也有了。

试二十次，比起试 90000 次来，工作量差上千倍哩。这就是动脑筋，找规律的好处。

能不能不试二十次，就找到一个自守数呢？

告诉你一个更简单的法子，把 625 这个三位的自守数自乘，得 390625，取末四位 0625，这就是末尾为 5 的四位自守数。不信，你试试。任何两个末尾是 0625 的数相乘，乘积的末尾还是 0625。要是你不承认 0625 是四位数（因为它是从0开始的），那么，以 5 结尾的四位自守数就再也没有了。

把 0625 自乘，末尾五位是 90625，这就是唯一的以 5 结尾的五位自守数。90625 自乘，末尾六位是 890625，这又得到了末尾是 5 的六位自守数。

这样找自守数，多方便！可靠不可靠呢？要说明不是巧合，得弄清楚它的道理。

用列方程的办法。设 a625 是四位自守数，计算一下：

$$(a625)^2=(1000a+625)^2=10^6a^2+125a\times10^4+625^2,$$

两边一比较，看出了诀窍：右边前两项末四位都是 0，原来 $(a625)^2$ 的末四位和 625^2 的末四位是一样的。所以，想要 $(a625)^2$ 的末四位是 a625，只要取a是 625^2 的倒着数的第四位就行了。

这样一算，就看出这个方法是有普遍性的。

另一个三位的自守数是376，376的平方是141376。那么，1376是不是四位自守数呢？

你试试看。错了。1376不是自守数。把1换成它的补数9，9376才是以6结尾的四位自守数。

这个方法也是有普遍性的。道理也不难弄清楚。想要$(a376)^2$的末四位是a376，必须$(a376)^2-a376$的末四位是0。算一算：

$$
\begin{aligned}
&(a376)^2-a376\\
&=10^6\times a^2+752a\times10^3+376^2-10^3a-376\\
&=10^6\times a^2+75a\times10^4+1000a+376^2-376\\
&=(10^2a^2+75a)\times10^4+141000+1000a\\
&=(10^2a^2+75a+14)\times10^4+(a+1)\times1000。
\end{aligned}
$$

想要这个数末尾四位是0，必须$a+1=10$，也就是说，a必须是376^2的倒着数的第四位的补数。

这样看来，想求两个$n+1$位的自守数，就要计算两个n位自守数的平方。你大概以为，这是最快的计算自守数的方法了。

有趣的是：工作量还可以再减少几乎一半。你看：

$5+6=10+1$；

$25+76=100+1$；

$625+376=1000+1$；

……

这又是一个普遍规律。两个位数同为n的自守数，它们的和是10^n+1。知道了这个非常特别的联系，我们只要求出末尾为5的那个自守数，写出它的补数，再加1，便得到了另一个自守数。

看起来神秘的自守数，我们一步一步地去了解它，就变得越来越简单了。要是你想更简单一些，还有一个办法：在计算n位自守数平方的时候，不必把2n位答数都算出来。只要从右向左，算出n+1位就可以了。

以上所说，都是对十进位数说的。实际上，在其它进位数中，也是有自守数的。

请你也来猜想

研究正整数的数学叫做数论。在数论里头，除了哥德巴赫猜想之外，还有大量的猜想，至今既不能证明，也不能推翻，正等待着人们去解决。

一个猜想，要是得到证明，就“升级”为定理；要是被推翻，就不成其为猜想了。所以，提出猜想是一件重要的事情，并且往往需要反复观察、归纳和实验。

瑞士数学家欧拉曾经猜想：任何正整数，都可以表示为不超过四个完全平方数的和。他是怎样提出这个猜想的呢？原来，他是根据古希腊人的设想，把全体正整数顺次排列起来——1，2，3，4，……发现只考虑完全平方数时，$1=1^2$，$4=2^2$，$9=3^2$，……那就有大量的正整数不能这样表示。当考虑到两个或者三个平方数的和时，$2=1^2+1^2$，$3=1^2+1^2+1^2$，$5=2^2+1^2$，$6=2^2+1^2+1^2$，$8=2^2+2^2$，$10=3^2+1^2$，……不能这样表示的正整数虽然还有，可是已经大量减少了。当利用到四个平方数时，$7=2^2+1^2+1^2+1^2$，$15=3^2+2^2+1^2+1^2$，不能这样表示的正整数就没有了。



当然，用观察、归纳和实验的方法，只能提醒我们可能有某种关系，不能代替证明。后来，法国数学家拉格朗日证明了这个猜想，使它成为一个定理。

费尔马曾经猜想：由 $2^{2^n}+1$ 产生出来的数都是素数。他真的找到了几个例子。当n＝0,1,2,3,4时，所得到的数 3，5，17，257 和 65537，全都是素数。不料后来有人指出，当 n = 5 时，$2^{2^5}+1$ = 4294967297 = 641 × 6700417，就不再是素数、而是一个合数。一个反例，就把费尔马的猜想给推翻了。

下面，请你来猜一猜三个有趣的猜想。

一个猜想是：

41＋2＝43；　43＋4＝47；
47＋6＝53；　53＋8＝61；
61＋10＝71；　71＋12＝83；
83＋14＝97；　97＋16＝113；
113＋18＝131；　131＋20＝151；
151＋22＝173；　173＋24＝197；
197＋26＝223；　223＋28＝251；
251＋30＝281；　281＋32＝313；
313＋34＝347；　347＋36＝383；
……

你看等式左边的加数，是按照2，4，6，8，10，……增加的；它们都是偶数，从2开始，每次都递增2。等式右边所得的和，全部都是素数。

请问，这个规律能一直保持正确吗？要是不能，那么，到哪一个数时，右边的和就不是素数了？

另一个猜想是：差数是2的两个素数，叫做双胞胎素数。最小的一对双生素数是3和5，其他还有5，7；11，13；17，19；29，31；41，43；59，61；71，73；……数字越大，它们就越稀少。不过，看起来似乎没有尽头。

有史以来，人们找到了不少数值很大的双生素数。1978年，发现了一对303位的双生素数。1979年，发现了两对双生素数：较小的一对，是 $694503810\cdot2^{2304}\pm1$；较大的一对，是 $1159142985\cdot2^{2304}\pm1$。它们的位数有703位之多。

现在，人们猜测，双生素数有无限多对，这便是著名的孪生素数猜想。你看呢？

第三个猜想是：英国的人类学家福钦注意到一个奇妙的情况。他从最小的素数2开始，乘上一些连续的素数，再加上1；然后，找出比这个答数要大的下一个素数；接着，从这个素数中，减去上述的连乘积。结果，福钦发现，所得到的数竟然全是素数！

请看实例：

$2+1=3$， 下一个素数是5；

$(2\times3)+1=7$，………………11；

$(2\times3\times5)+1=31$，………………37；

$(2\times3\times5\times7)+1=211$，………………223；

$(2\times3\times5\times7\times11)+1=2311$，………………2333；

$(2\times3\times\cdots\cdots\times13)+1=30031$，………………30047；

$(2\times3\times\cdots\cdots\times17)+1=510511$，………………510529；

$(2\times3\times\cdots\cdots\times19)+1=9699691$，下一个素数是9699713；

…………

$5-2=3$；　$11-6=5$；

$37-30=7$；　$223-210=13$；

$2333-2310=23$；　$30047-30030=17$；

$510529-510510=19$；　$9699713-9699690=23$；

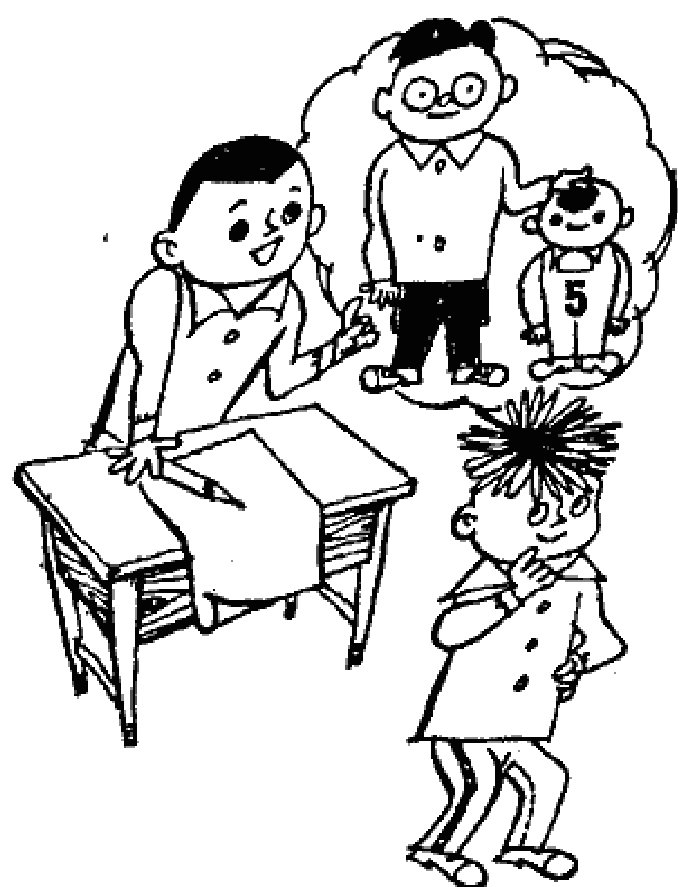
…………

福钦认为，照他这种办法做下去，所得到的数都是素数。许多数论专家都相信这一点。你看呢？



是不是每一个猜想，将来都要被推倒或者被证明呢？

那也不见得。1931年，美国25岁的数学家哥德尔证明了一个十分重要的定理：在数论里面，有许多这样的命题，它既不能被推翻，也不能被证明。这个定理使许多数学家大吃一惊！从此，数学家对待猜想，有了三个努力方向：第一，证明它；第二，推翻它；第三，说清楚它既不能被证明、也不能被推翻的道理！



方程想得周到

你相信吗？有的时候，方程比我们更会思考。不信，请看这个问题：

父子两人，爸爸32岁，儿子5岁，问几年后，爸爸的年龄是儿子的十倍？

你设x年后，爸爸的年龄是儿子的十倍，根据题意列出方程是：

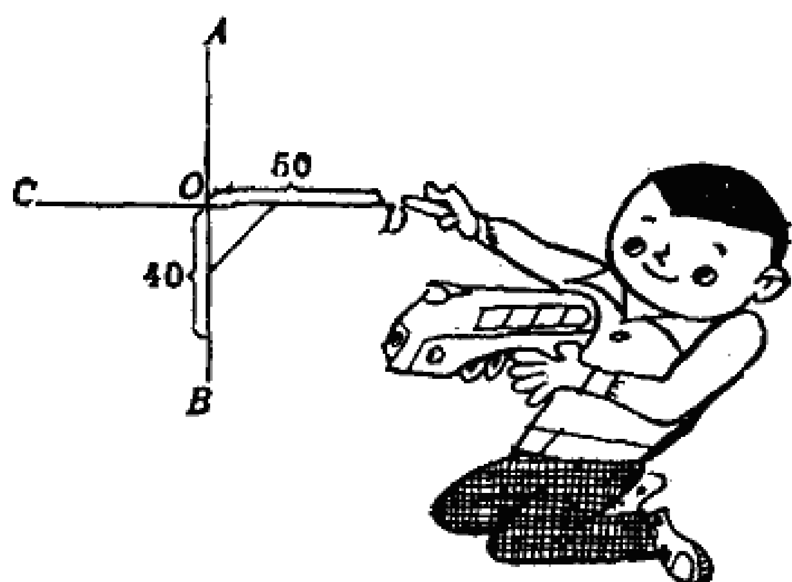
$32+x=10(5+x)$；　　解得　$x=-2$。

x怎么会等于－2呢？是方程有问题，还是计算有错误？都不是。－2，是说两年前爸爸的年龄是儿子的十倍。事实上，两年前爸爸是30岁，儿子是3岁，爸爸

的年龄正好是儿子的十倍。当你列方程时，你可没想到，爸爸的年龄今后不能成为儿子年龄的十倍，而只有在过去才能成立。

你看，方程不是比我们想的更周到吗？它能够提醒你有什么疏忽和漏洞。

再看一个问题：两条铁路成直角相交，有两列火车同时向交叉点开过来。一列由离交叉点 40 公里的车站出发，每分钟走 800 米；另一列由离交叉点 50 公里的车站出发，每分钟走 600 米。问经过多少分钟后，两个车头之间的距离最短？这个距离是多大？



这个题比较复杂。你得先画一个图，表示火车运动的情况。直线AB和CD是两条交叉的铁路，O是交叉点；OB = 40公里，OD = 50 公里；经过x分钟，两个车头之间的最短距离是MN = a。这样，

因 $BM=0.8x$ 公里，

得 $OM=40-0.8x$ 公里。

同理，$ON=50-0.6x$ 公里。

根据勾股定理，

$MN=a=\sqrt{OM^2+ON^2}=\sqrt{(40-0.8x)^2+(50-0.6x)^2}$；

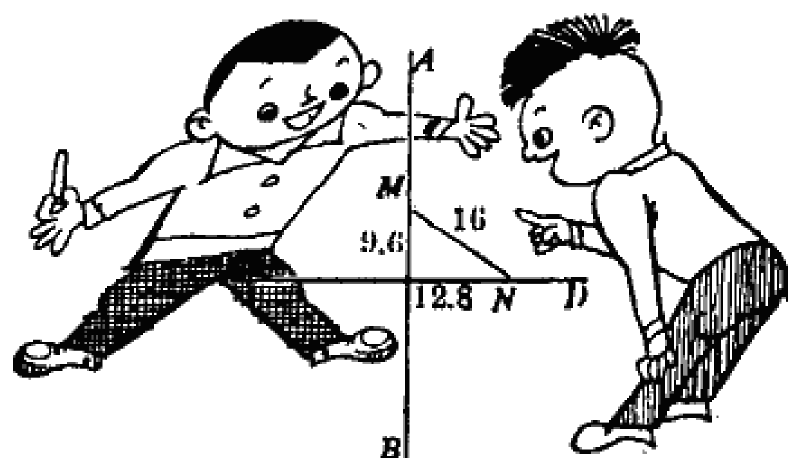
解得 $x=62\pm\sqrt{a^2-256}$ 。

x既然表示时间，那它一定是实数。所以，根号里头的式子 a^2-256，必定大于或者等于 0。在 $a^2=256$，也就是 $a=16$ 时，a是最小的数值。

a既已求出，便可算得$x=62$。也就是说，在出发后经过 62 分钟时，两个车头离得最近。在这个时刻，它们的相互距离是 16 公里。

现在，你来决定车头的位置。先计算长度OM，它应当等于$40-62\times0.8=-9.6$。出现的负号该怎样解释呢？它表示这列火车开过了交叉点，继续开了 9.6 公里。

同样，可以算出长度ON，应当等于$50-62\times0.6=12.8$。它表示这列火车还必须再开 12.8 公里才到交叉点。所以，两列火车头的正确位置应当是下页图的样子。这个图，不是你开头画的那个图的样子了。这岂不是说，方程表现得非常宽宏大量，尽管你当初的草图是“闭门造车”，画得很不对头，可它还是给了你正确的



答案，并且帮助你纠正了画图的错误。

方程是你自己列的，图是你自己画的，为什么方程能想到你没有想到的情况呢？其实，这是因为你没有把自己的错误想法，列进方程里去。

拿第一题来说，你想的是x年后，写的是 32＋x。要是真的是x年后，那x必须是正数，可是，你并没有把x＞0 这个条件，列到方程里去。方程里的x可正可负，方程当然不知道你没有告诉它的事。

第二题也是这样。在你先画的图里，N在O点的右边，M在O点的下边，这两个条件，你没有把它们写到方程里去。你虽然是画了图列方程，可是你没有把图的具体样子告诉方程，方程只知道OMN是直角三角形，不知道M、N在上在下，在右在左，当然就老老实实地按要求计算了。

要是你把x年后的“后”字，和图的位置都列到方程里，那么，方程只好告诉你“此题无解”了。

买卖是否公平

有个卖糕点的商店，天平坏了，两臂的长度不是正好相等。店主唯恐顾客吃了亏，于是想出了一个称糕点的办法：

他把糕点放在右面的盘中，在左面的盘里加砝码，称出一个斤两数。然后，把糕点又放在左面的盘中，在右面的盘里加砝码，也称出一个斤两数。最后，把这两个数相加、再除以2，作为糕点的正确重量，向顾客收钱。用这个办法，店主认为他买卖公平，老少无欺了。

后来，有个顾客提出了一个新的办法。他说：要买二斤糕点，先把一斤重的砝码放在左盘，在右盘中不断加糕点，直到天平平衡为止。然后，再在右盘放好一斤重的砝码，在左盘中不断加糕点，也使得天平正好平衡。最后，把两次称得的糕点放在一起，按二斤收钱。

要是你认为都是好办法，那就错了。为什么呢？让我们来算一算：

设左右两臂的长度分别是a和b，并且a和b不相等。根据天平平衡的道理，左边的重量乘上臂长a，等于右

边的重量乘上臂长b。

照店主的称法，一斤糕点第一次得砝码重量是$\frac{b}{a}$斤，第二次得砝码重量是$\frac{a}{b}$斤。

所以，砝码共重$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$斤。可是，当$a\neq b$时，

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}>2。$$

这意味着，砝码比糕点的实际重量要重。这样称，店主向顾客多算了货价。

再看顾客的称法，用糕点去迁就砝码。第一次的一斤砝码，与它平衡的糕点重量是$\frac{a}{b}$斤。

同样的道理，把一斤砝码放在右盘，左盘与它相平衡的糕点重量是$\frac{b}{a}$斤。

上面已经说过，在$a\neq b$时，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$，这时，糕点实际上不止二斤了。

有关不等式的一些问题，稍不注意，很容易得出不正确的结论。

下面两个有趣的问题，都和不等式有关，请你仔细想一想：

一，小王和小李赛跑。小王跑得快，他跑到100米终点时，小李才跑到95米。小李说，你跑得快，让让我吧。于是第二次，小王从起跑线后退5米，结果，还是小王先到终点！这是为什么呢？

二，有个货仓的管理员，为了保持仓内存货的平衡，规定每天上午货物出库，下午入仓；上午出10%，下午就进10%。这样过了一个月，他发现存的货越来越少了，大吃一惊！要是他马上改为上午先入10%，下午再出10%，结果会怎么样呢？



温故知新一例

唐朝的时候，杨损做尚书，是个大官，他在选用人才上，有过好的想法和做法。

有一次，在两个办事员中需要提升一个，可是他们的种种条件完全一样，负责人事的官员感到难办，便去请示杨损。杨损经过一番考虑后，说：办事员要能计算得快。现在，让这两个办事员都来听我出题，哪一个先得出正确的答案，他就应该得到提升。他出的题是：有人在树林中散步，无意中听到几个盗贼在讨论分赃。他们说：要是每人分6匹布，就会余下5匹；要是每人分7匹，又会短少8匹。问盗贼有几个？布匹是多少？

解这样的题目，古时候用的是"盈不足术"。它先

出现在《九章算术》一书中；后来，在《张邱建算经》一书中，它的应用得到了推广。其中的一个例子是：今有麻雀和燕子两种飞禽。已知每只麻雀重 33 铢（铢是古代的重量单位），每只燕子重 29 铢。现在，共有麻雀和燕子 25 只，共重 781 铢。问麻雀和燕子各有几只？

书中是这样用盈不足术来解的：先任意假定麻雀是 15 只，得燕子是 10 只，算出一共重$33\times15+29\times10=785$铢，比题中的已知数多出了 4 铢。然后，再任意假定麻雀是 12 只，得燕子是 13 只，算出一共重$33\times12+29\times13=773$ 铢，比题中的已知数又不足 8 铢。接下去，很快就求出麻雀和燕子数了。

这样的解法是有数学根据的：

设第一次假定的麻雀数是 a_1，第二次假定的麻雀数是 a_2；盈的数是 b_1，亏的数是 b_2。那么，求麻雀数的公式就是：

$$\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}。$$

把数代进去，算出麻雀数是：

$$\frac{8\times15+4\times12}{4+8}=\frac{120+48}{12}=14只。$$

算出了麻雀数，燕子数也就有了。

你可能觉得奇怪。用不正确的答数代进去，倒能

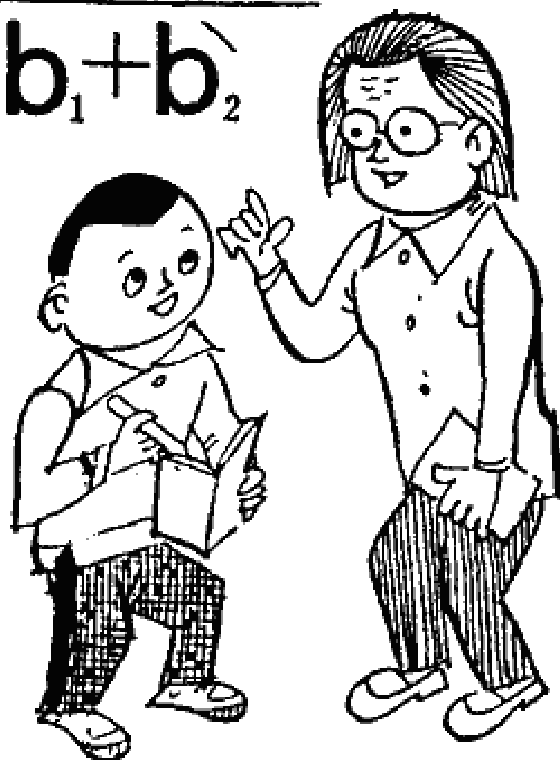
得出正确的答数，莫非是一种巧合？

你也可能纳闷。要是两次假定的麻雀数，得出的重量都是盈，或者都是不足，是不是也能算呢？

先回答后一个问题。

假定麻雀是 18 只，得燕子是 7 只，重量较题中的数多 16 铢。再假定麻雀是 16 只，得燕子 9 只，重量又多 8 铢。于是按公式

$$\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$$



排出算式：

$$\frac{16\times16+18\times(-8)}{16+(-8)}=14。$$

这里用了正负数的概念，把第二次的盈 8 铢，看成是“不足 - 8 铢”，照套公式，公式保持正确，一样合用。

假定麻雀 13 只，燕子当然有 12 只，这时，重量比题中的数不足 4 铢。再假定麻雀 10 只，燕子便是 15 只，这时又要不足 16 铢。

因为在盈不足术里，第一次把“盈”看作是正常的，第二次又把“不足”看成是正常的；所以，现在要把第一次的“不足”4 铢看成是“盈 - 4 铢”。代入公式后就得到：

$$\frac{13\times16+10\times(-4)}{16+(-4)}=14。$$

结果也对。可见盈不足算法的公式总是正确的。它同正负数概念一结合，就能起一个自动开关的作用，把各种情况全都包括进去了。你看，数学的作用多巧妙。

这种别开生面的方法，后来传到了欧洲，别名很多，叫做试位法、推解法、两次假设法等。

现在来回答前一个问题——为什么盈不足术总是对的呢？

这个问题，可以用解方程的办法来回答。

设麻雀的实有数是x，麻雀、燕子的实有的总重量是M。很明显，要是麻雀比燕子重g铢，那么，多一只麻

雀，重量是M加g铢，多二只，加2g铢……少一只，就少g铢。总之，麻雀的增加量（或者减少量）和总重量的增加量（或者减少量）是成正比的。也就是麻雀为a_1时，重量为$M+b_1$（盈b_1）。

$$\because \quad \frac{a_1-x}{b_1}=\frac{1}{g}, \quad 同理, \quad \frac{x-a_2}{b_2}=\frac{1}{g};$$

$$\therefore \quad \frac{a_1-x}{b_1}=\frac{x-a_2}{b_2}。$$

$$解得 \quad x=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}。$$

这盈不足术，完全符合解方程的道理。

我们用列方程求解，那古人是怎样找出了盈不足算法的呢？

古人是怎样找到这个算法的，书上没有记载，我们只能猜想：

一，盈b_1，不足b_2，盈与不足的差距是b_1+b_2。这个道理不难明白。山顶比地面高 200 尺，湖底比地面低 50 尺，从山顶到湖底，差 200 + 50 = 250 尺。

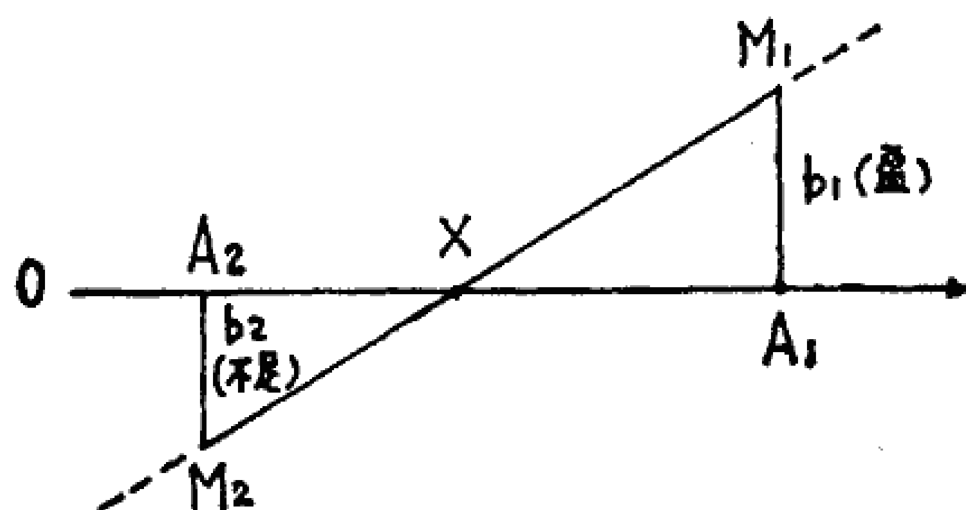
二，这个差b_1+b_2，是由于所设麻雀数的不同造成的。两次所设麻雀的差是a_1-a_2。麻雀差a_1-a_2只，重量差b_1+b_2铢，每差一只麻雀重量差多少呢？当然用除法，得每差一只麻雀，重量差$\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2}$铢。

三，反过来，当麻雀是a_1时，重量比实际重量盈b_1

铢。既然多一只麻雀多$\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2}$铢，多几只麻雀才能盈b_1铢呢？又用除法，得a_1比实际麻雀数多$\frac{b_1}{\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2}}=\frac{b_1(a_1-a_2)}{b_1+b_2}$只。所以，实际麻雀数是：

$$a_1-\frac{b_1(a_1-a_2)}{b_1+b_2}=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}。$$

这个题也可以用几何图形来说明：



OX的长度表示实有麻雀数。$OA_1=a_1$，$OA_2=a_2$；向上表示盈，向下表示不足；而在X这一点，是不盈不亏的。知道了a_1，a_2，b_1，b_2，求OX，这个几何计算题你一定能够完成它。

请注意，在直线M_1M_2上任取两个点，都能决定这条直线，找到X。这就是从错的猜想中，能找出正确答案的道理！

奇妙的三兄弟

自古以来，在我国各地，就流传着多种多样的智力游戏。其中，有的流传至今，深受欢迎。

最近，见国外介绍一种叫做“拣石子”的游戏，明确指出是从中国学来的，有的学者还就此写了论文。可惜它究竟起源于我国什么朝代，流传情况如何，已经无从查考了。

这个游戏的玩法非常简单，只要在地上拣些小石头或者小树杈，分成两堆，每堆的个数可以是任意的，只要不相等就行。玩的规则如下：

一，两人轮流拿石子，每次可以从一堆石子中，任意取一颗或者几颗，直到把一整堆石子全部取走。也可以从两堆中，任意取走相等数量的石子。

二，每次轮到谁拿，他至少得拿一颗石子，不允许弃权，一颗都不拿。

三，谁拿光剩下的石子，就算他赢了。

说也奇怪，这个看起来十分简单的游戏，要想十拿九稳，取得胜利，很不容易。不知道取胜诀窍，马虎大

意随便拿，只能一输到底。

诀窍在哪里呢？

先请看这张表：

序数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A 数列	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19
B 数列	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31

表中第一排数，是表示拿石子的先后顺序的。第二和第三两排数，叫做A数列和B数列，数列中相应的数构成一对。例如第五对是(8,13)，第九对是(14,23)。

你想取胜，只要记住：在每次取走石子以后，要是能使留下的石子个数，和表中A数列和B数列的某一对相符合，就必胜无疑了。所以，你可以把(1,2)，(3,5)，(4,7)，……这些数叫做“胜利之数”。

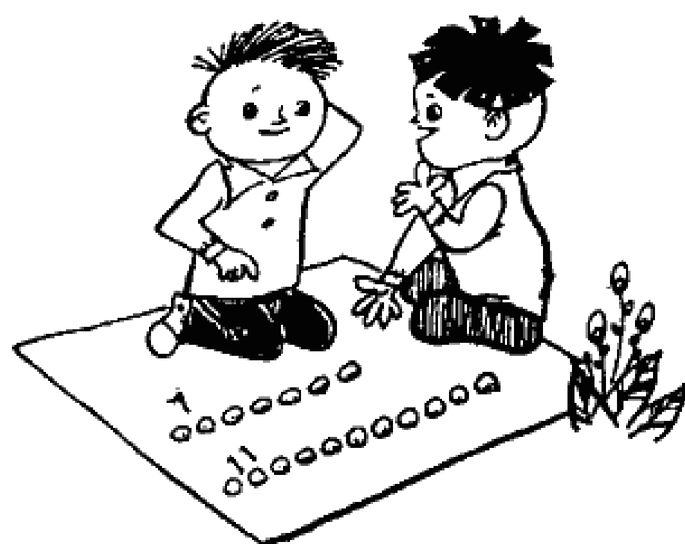
举一个例子。

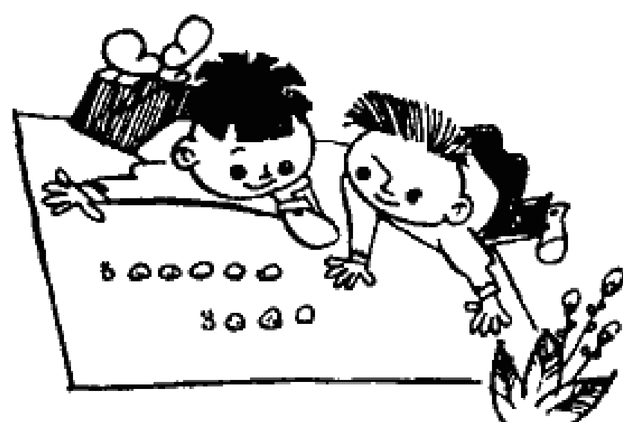
开始时，两堆石子分别有 7 颗和 11 颗：

0000000

00000000000

要是你先拿，就可以在第二堆中取走 7 颗石子，使它成为：





0000000

0000

注意，这对(4，7)，是表中的第三对。

以后，不管对手怎样动作，你总是稳操胜券了。要是对手从两堆石子中各拿掉一颗，使它成为：

000000

000

这时，你就可以再从第一堆中取走一颗石子，使留下的石子数，是表中第二对(3，5)：

00000Q

000

这样一步一步，从表中较大的一对数，逐渐过渡到较小的一对数，就可以保证你拿到最后的一颗石子。

你可能要问：表上一对一对的数那么多，又看不出有什么变化规律，这怎么记得住呢？

是怪别扭的，不好记。可这正是游戏的奥妙所在！

说到这里，讲一个“无理数三兄弟”的故事给你听。因为这个故事和拣石子有密切关系。

在数学里，不循环无限小数叫做无理数。它是一个庞大的家族，成员比有理数家族多得多。在这个家族里，有三兄弟的模样和脾气特别相象。其中，老大是2.61803398……准确值是$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$；老二是1.61803398……准确值是$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$；老三是0.61803398……准确值是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。他们挨个正好相差1。

在这三兄弟中，老三来头不小，它随同华罗庚教授奔走大江南北，在推广优选法中立下了汗马功劳，这就是有名的0.618法。优选法里用0.618最好，这是1953年一个美国人发现的。为什么0.618最好？国外虽有一些证明，可都是不正确的，华罗庚指出了这一点。

随后，我国青年数学家洪加威，在1973年首先发表了一个严格的证明。

从历史上来看，老三早在古希腊、罗马时代，就已经名扬四海，叫做“黄金分割数”，和绘画、雕刻、建筑等都结下了不解之缘。

三兄弟友爱相处，亲密无比，它们之间的奇特联系，说出来令人大吃一惊。不信，你用笔算一下就知道了。

现在，请你把老二和老三乘一乘：

$\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{4}=\frac{5-1}{4}=1$。它们的乘积是1。换句话说，老二和老三是互为倒数。在一切实数中，只有唯一的这样一对具有倒数关系的正数，而它们的差是1。

老大和老二的关系也很不平常。老大正好是老二的平方，而它们的差是1。在全部实数中，具有这种关系的一对正数，也是独一无二的。

这样，要是你设老二为x，得老大是$x+1$，老三是$x-1$，那么，$x(x-1)=1$，$1+x=x^2$。

搞清楚了它们之间的这种关系，要是你把老二记为ϕ，那老大就是ϕ^2，老三就是$\frac{1}{\phi}$。

说到这里，原来上面拣石子游戏中很难记住的A数

列，它的通用公式是$[n\phi]$，B数列的通用公式是$[n\phi^2]$。注意，这里的n表示序数；[ ]不是中括号，而是表示对正数来说，只取整数，略去小数，比如$[2\phi]=[3.236]=3$，$[2\phi^2]=[5.234]=5$。

不仅如此，A数列和B数列中所有的数，正好是全体自然数，既不重复，也不遗漏！

这些性质是惠特霍夫发现的，所以这个游戏，在国外就叫做惠特霍夫游戏。

游戏说到这里，你也许会问：有没有简便办法，可以排出这个胜利之数的表格呢？

回答是有。按照下面的办法，你马上就能把这个表排出来：

一，第一对胜利之数当然是(2,1)。对方不论怎么拿，剩下的你都能一把抓尽。

二，比1,2大的数轮到了3。3＋序数2＝5，(3,5)就是第二对数。下一个轮到4，4＋3＝7，(4,7)就是。

三，以此类推。要是第1,2,……,n－1对数都排好了。那第n对中的A数，就是前面没用过的最小自然数。把它加上序数n，就得到B数。

为什么这样拿必胜，说来话长，就不多说了。

题目做好以后

现在，有的同学做数学题不够认真，不够细致，有相当严重的“交差”思想。在作业本上，还不时发现小船的长度是一万六千米，飞机的速度是每秒四十万公里，祖父的年龄是十八岁等明显的错误。

实际上，做完题，经过检查或者验算无错之后，往往还有许多事情可做。这样做，好处很多，也很有趣。

举一个例子。

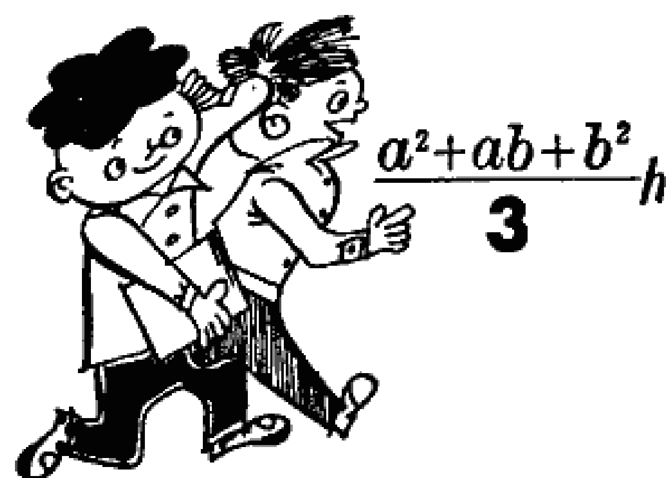
小学数学讲常见几何体，有求正方形为底的棱台体积公式。这就是下底的每边长为a、上底的每边长为b、高为h的棱台，它的体积是：

$$\frac{a^2+ab+b^2}{3}h。$$

你用这个公式做完一个题之后，就可以从许多方面，来看看它会发生什么样的变化和结果。

要是$a=b$，那这个棱台就变成棱柱，这时体积公式就变成a^2h，正好和已知的求棱柱体积公式相一致。

要是$b=0$，那这个棱台又变成为棱锥，这时体积公



式又变成$\frac{1}{3}a^2h$，也正好和已知的求棱锥体积一致。

a、b、h都取正数值，其中任何一个的量增大，而其他两个的量保持不变时，所得的体积数值也增大。这个计算中的变化，是与看到的棱台实际变化相一致的。

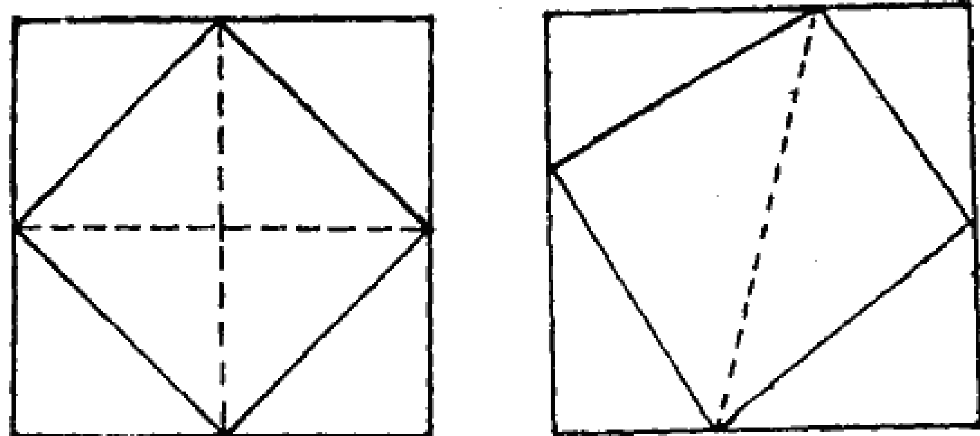
a、b和h是长度，体积的单位是长度单位的立方。

$$\frac{a^2+ab+b^2}{3}h=\frac{1}{3}a^2h+\frac{1}{3}abh+\frac{1}{3}b^2h。$$

其中每一项的单位，都是长度单位的立方，正好和体积单位是长度单位的立方相一致。用数学的术语来说，这个公式的“量纲”是对头的。

再举两个例子。

大正方形里有一个内接的小正方形，求证小正方形的面积，至少是大正方形的$\frac{1}{2}$。这个题目，你容易想到的是用勾股定理，证明小正方形边长的平方，大于或



者等于大正方形边长的平方的$\frac{1}{2}$。

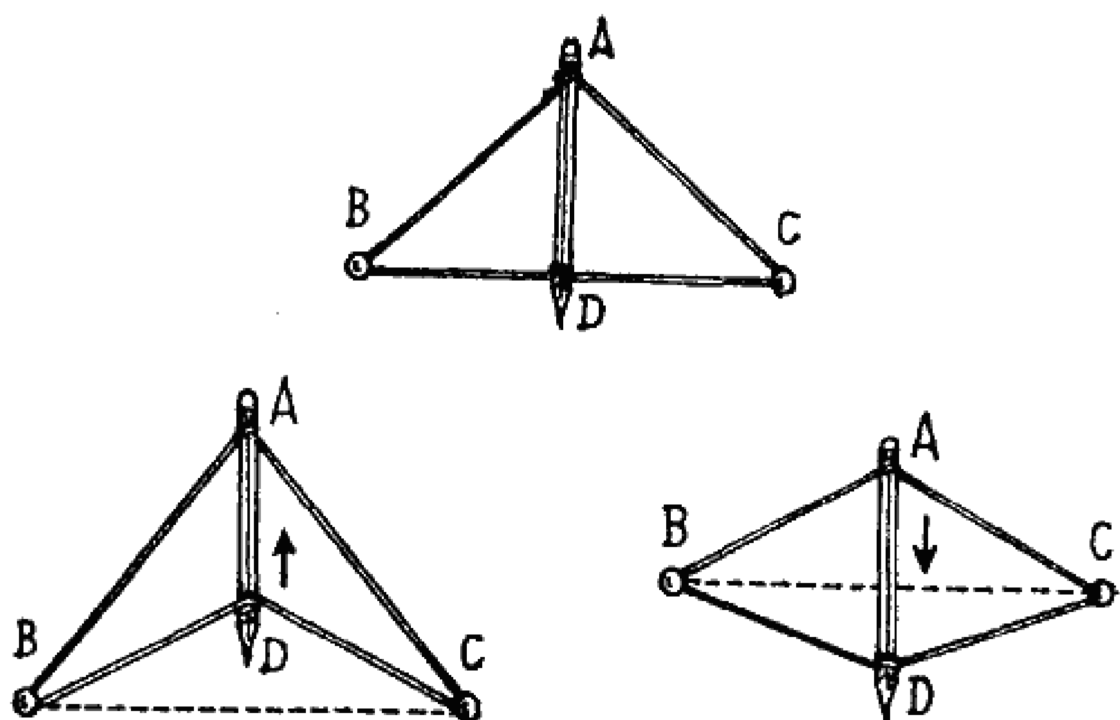
为什么你首先想到这个方法呢？因为画出来的图上有个直角三角形，所以你头脑里会联想到勾股定理。

这样做完题，多想想，你就会想到一些图上还没画出来的东西，比如小正方形的对角线，对角线长，这个小正方形就大。很明显，小正方形的对角线，总不会比大正方形的边小。当他们相等时，小正方形面积恰好是大正方形的一半。

用这个方法研究正方形有效，把正方形换成三角形、正五边形、正六边形呢？想清楚了，你就会做许多题目。

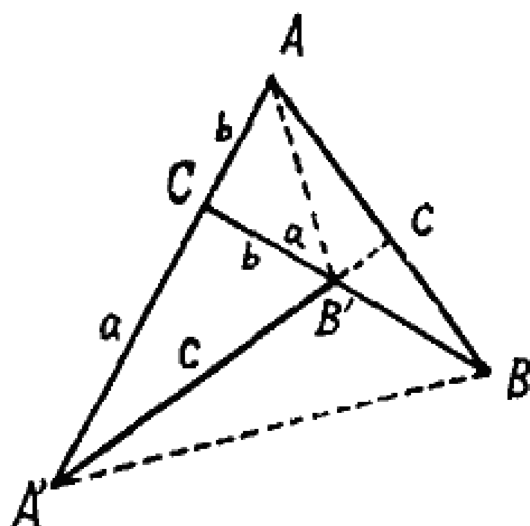
再进一步，你还可以想想：要是正方形内接一个任意四边形，这个任意四边形的面积，什么时候比正方形的一半大？什么时候又比正方形的一半小呢？

另一个例子，是三角形面积等于底乘高除以2。你在做题时，常常忘记了，高有时会跑到底的外边；即使想到高会向外跑，恐怕没有想过，可以让高向上跑，或者向下跑。



如图，你假想三角形的两个顶点B和C是两颗钉牢在木板上的钉子，高AD是一根小木棒，一根橡皮圈绕在钉子上和木棒的两头，形成了三角形的边。把这个“高”向上一推，三角形变成了凹四边形ABDC；向下一推，又变成了凸四边形ABDC。这样，原来的高和底，都变成了四边形的对角线，并且是互相垂直的对角线。有趣的是，这两个四边形的面积，仍然是原来那个底乘高除以2！

这种凹四边形的面积公式，有时还真有用处。下面这个勾股定理的巧妙证法，关键便是这样一个凹四边形面积的计算：



把直角三角形ABC绕直角顶点C旋转90°，得到一个全等的△B′A′C。凹四边形AA′BB′的两条对角线AB和A′B′是互相垂直的。所以，

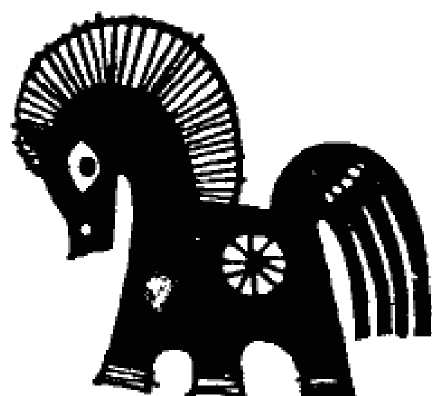
$$AA'BB' \text{面积} = \frac{1}{2}c^2。$$

另一方面，

$$AA'BB' \text{面积} = \triangle ACB' + \triangle A'CB = \frac{1}{2}(a^2+b^2)。$$

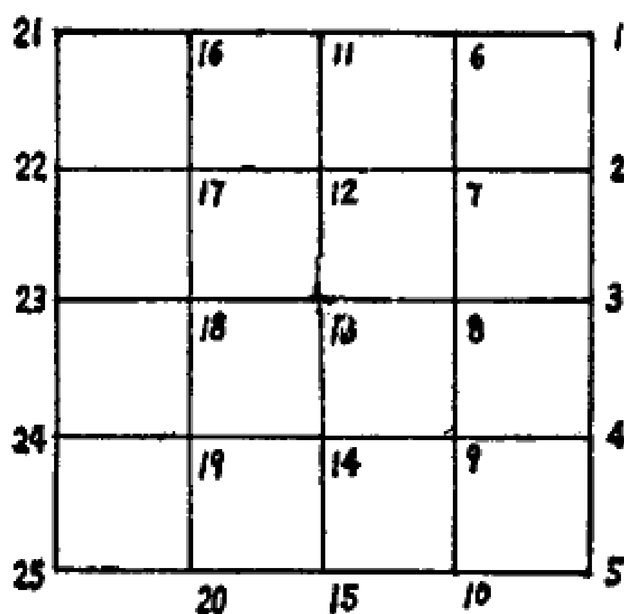
$$\therefore\quad c^2 = a^2 + b^2。$$

这就证明了勾股定理。



换个眼光来看

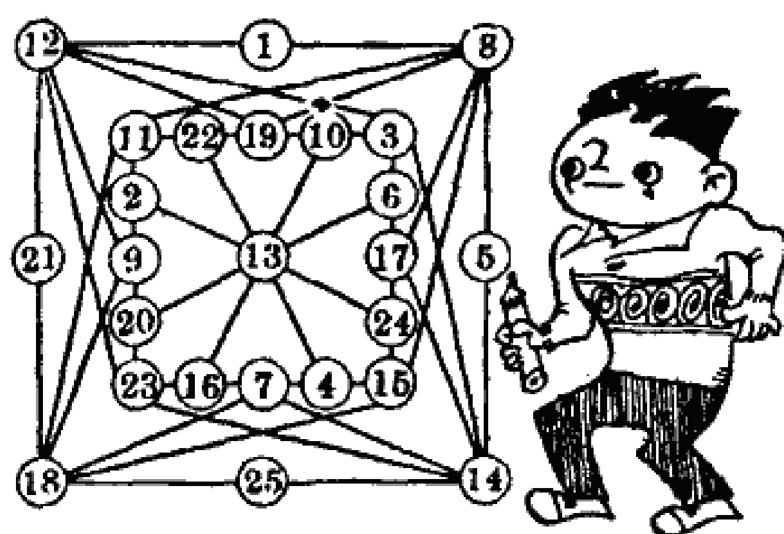
这是象棋盘的四分之一，中央有一匹马。马走“日”字的对角点，问这匹马怎么走遍所有的交叉点，既不重复，也不遗漏？



要是你随意走，试试看，很容易弄乱。就是找出了一种走法，重走一次，往往又会出差错。

要是你换个眼光来看，却变得简单明白，不会乱套，不怕重复。原来棋盘交点的相互关系，人和“马”的看法是不同的。在人看来是紧邻的两点，可是在“马”看来并不是近邻。因为它从 1 到 2 ，至少得走三步，而到 12 或者 8 只要一步。

所以对这个问题，你不妨丢掉棋盘的形状，再按马的眼光，另外画一个图：



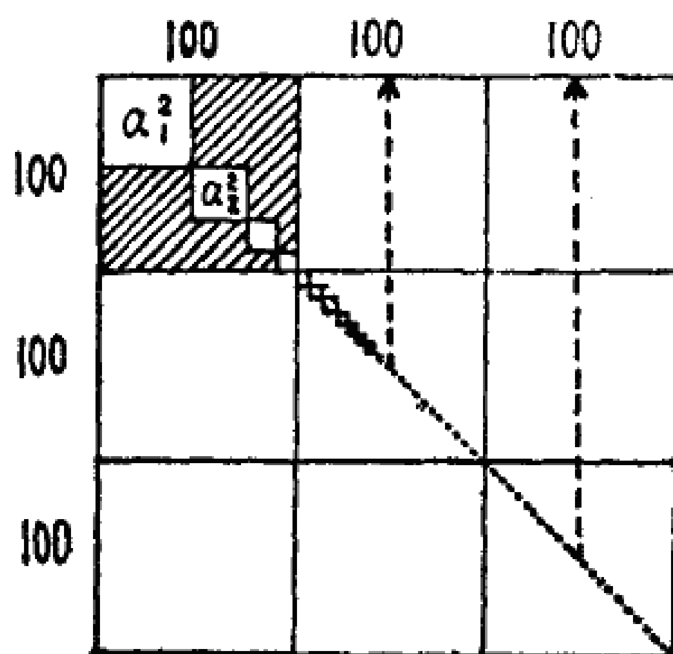
在这个图上，你就很容易选出一种走法了。比如说，可以从 13 走到 10；然后沿着内圈走，10→19→22→…都走到了；再转到外圈，沿着外圈走，12→21→18→……→1，就把这二十五个点一一走到了。

这种解决问题的办法，叫做变更问题法。有不少数学难题，可以用这个办法来解决。

举一个例子。

已知n个数，$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=300$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geqslant 10000$；求证$a_1+a_2+a_3>100$。

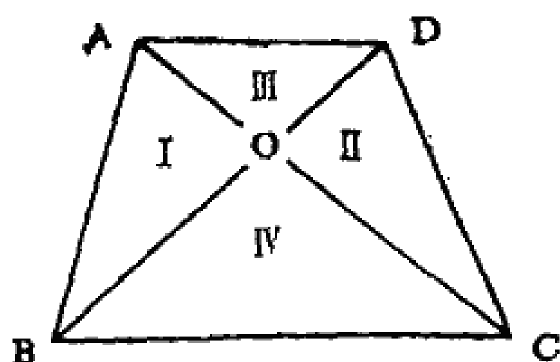
这个题头绪多，看不出已知和求证之间，有什么明显的关系。它曾难住了许多解题能手。可是，你换个眼光一看，假设$a_1+a_2+a_3 \leqslant 100$，再画个图，就不难了。



这里，对角线上的小正方形面积$=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，边长$a_1+a_2+\cdots+a_n=300$。当$a_1+a_2+a_3 \leqslant 100$时，把这些小正方形都推上去，它们的长是300；再依次把它们移入左上角的小正方形内，便可看出，它们决不能填满这个小正方形，也就是填不满整个图形的$\frac{1}{9}$了！

再举一个例子。

四边形ABCD被对角线分成四个三角形，已知$\triangle Ⅰ=\triangle Ⅱ$；求证$\triangle Ⅲ+\triangle Ⅳ\geqslant\triangle Ⅰ+\triangle Ⅱ$。



这个题看来很难，因为这是任意四边形，没有什么可用的条件。要是你眼光一变，用代数方法来解决，就不难了。

设对角线相交于O，$\triangle Ⅰ=\triangle Ⅱ=a$，$\dfrac{AO}{OC}=\lambda$。

$\because\quad \dfrac{\triangle Ⅲ}{\triangle Ⅱ}=\dfrac{AO}{OC}=\lambda$，（高相同的两个三角形的面积之比，等于它们的底之比），

$\therefore\quad \triangle Ⅲ=\lambda a$；

$\because\quad \dfrac{\triangle Ⅳ}{\triangle Ⅰ}=\dfrac{OC}{AO}=\dfrac{1}{\lambda}$，

$\therefore\quad \triangle Ⅳ=\dfrac{a}{\lambda}$。

$\therefore\quad \triangle Ⅲ+\triangle Ⅳ=\lambda a+\dfrac{a}{\lambda}=\left(\lambda+\dfrac{1}{\lambda}\right)a\geqslant 2a$。

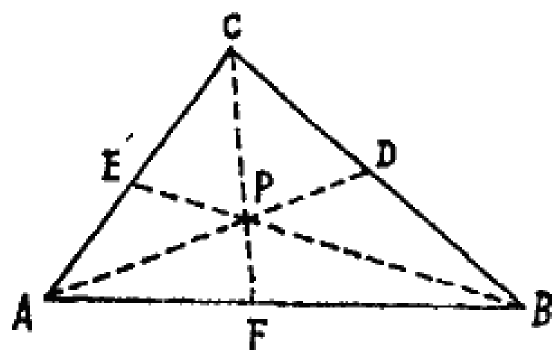
这便迎刃而解了。顺便还知道，想要等号成立，ABCD一定是平行四边形！

你看，做题的时候，有时候换一换眼光来看，几何题从代数方面想想，代数题从几何方面想想，很有好

处，很有必要！

用这种变换眼光的办法，有时还能把一个非常简单的事实化为很难的问题。

比如在三角形ABC内任取一个点P，PA、PB、PC把△ABC分成三块：



$$\triangle ABC=\triangle APB+\triangle BPC+\triangle CPA。$$

谁也不会把这个等式的证明作为题目给你做。

要是注意到面积比与线段比的关系：

$$\frac{\triangle APB}{\triangle ABC}=\frac{PF}{CF},\quad \frac{\triangle BPC}{\triangle ABC}=\frac{PD}{AD},\quad \frac{\triangle APC}{\triangle ABC}=\frac{PE}{BE},$$

把这三个等式一加，便是：

$$\frac{PF}{CF}+\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}=1。$$

求证这个等式，曾经是大学的入学考试题。

高水平的剪拼

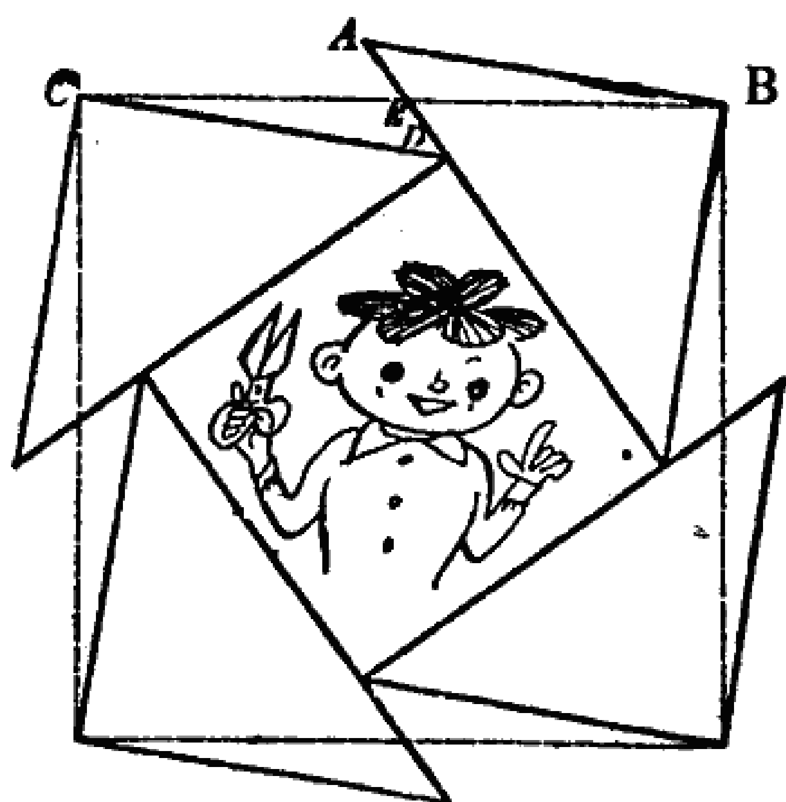
七巧板是我国的一种智力游戏，已有一千多年历史。它把一个正方形分成固定的七块，就可以千变万化地拼出许许多多的图案来。

这是一个很好的例子，说明在几何图形分割问题上，既简单、又有趣的，要算正方形的剪剪拼拼了。这类问题，在生活中也时常碰到。比如要把两块正方形的木板锯一下，拼成一块大正方形木板；把二尺长、三尺宽的布裁开，拼成一块方布。

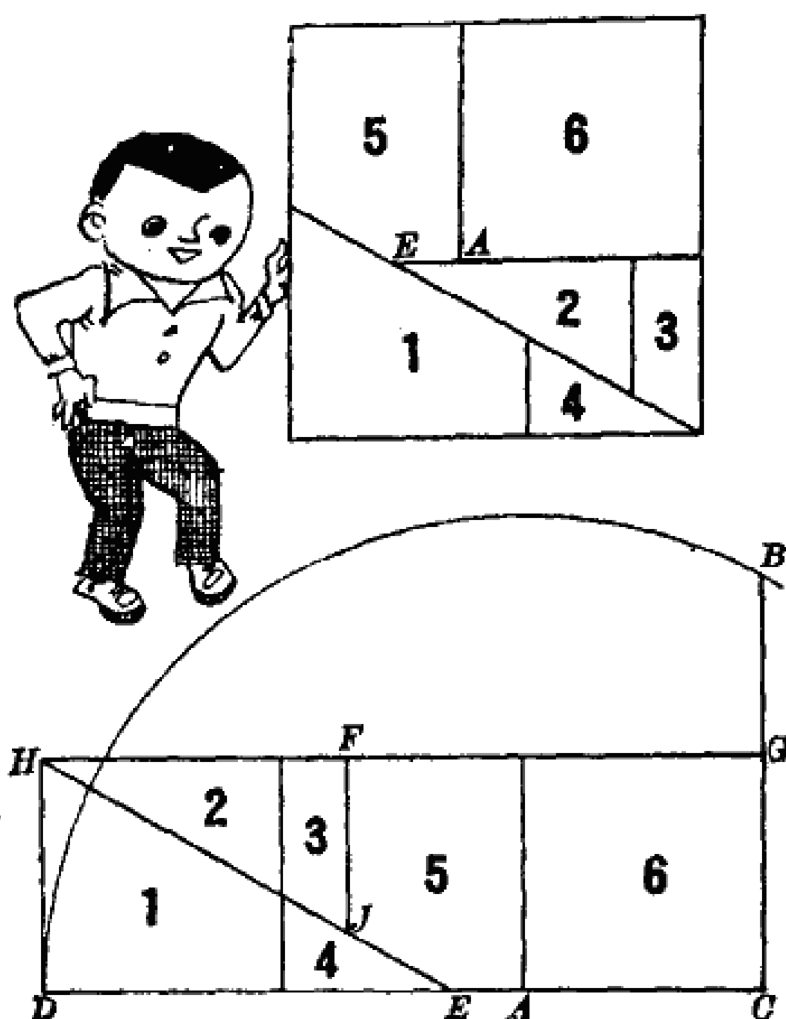
正因为正方形的拼剪和日常生活关系密切，所以它的历史非常悠久。据说，古希腊已会一些拼剪法。可是，第一本谈论这个问题的书，是十世纪的阿拉伯数学家魏发写的。

剪拼图形，属于几何学的等积变形。懂得等积变形不难，可拼剪的技巧可着实不简单！许多工厂就常常提出这样的问题：把一块金属板切成一些这种或者那种形状的零件料时，怎样才能使材料的消耗最少？可见拼剪技巧，对工程技术人员和工人很有用场。

一个古老的问题是：怎样把三个一样大小的正方形，剪拼成一个大正方形？这在古代是数学上的一个难题。第一个解决它的人是魏发，现在就把他的剪拼法叫做魏发剪拼法，享有很高声望。他的办法是先把两个正方形按对角线剪开，再把它拼剪成一个大正方形如图：



他的方法确实简便，真是难为他想得出来，可惜块数多了一点，要九块。本世纪初，英国的杜德奈提出了更为巧妙的剪拼法。从下页下图上看出，剪拼时，先以A为中心，AD为半径作圆，使DE＝FG＝BC。按照他的方法，只要分成六块就行了。下页上图就是拼成的大



正方形。

你有兴趣，不妨想一想，看能不能找到更好的剪拼法？

和许多运动项目有世界纪录相类似，几何图形的拼剪问题也有世界纪录，并且也一样不容易打破。它不断地引起数学爱好者、特别是青少年的关心和重视。

为什么剪拼技巧如此逗人喜爱？除了和生产、生活有密切关系之外，还有以下两个原因：

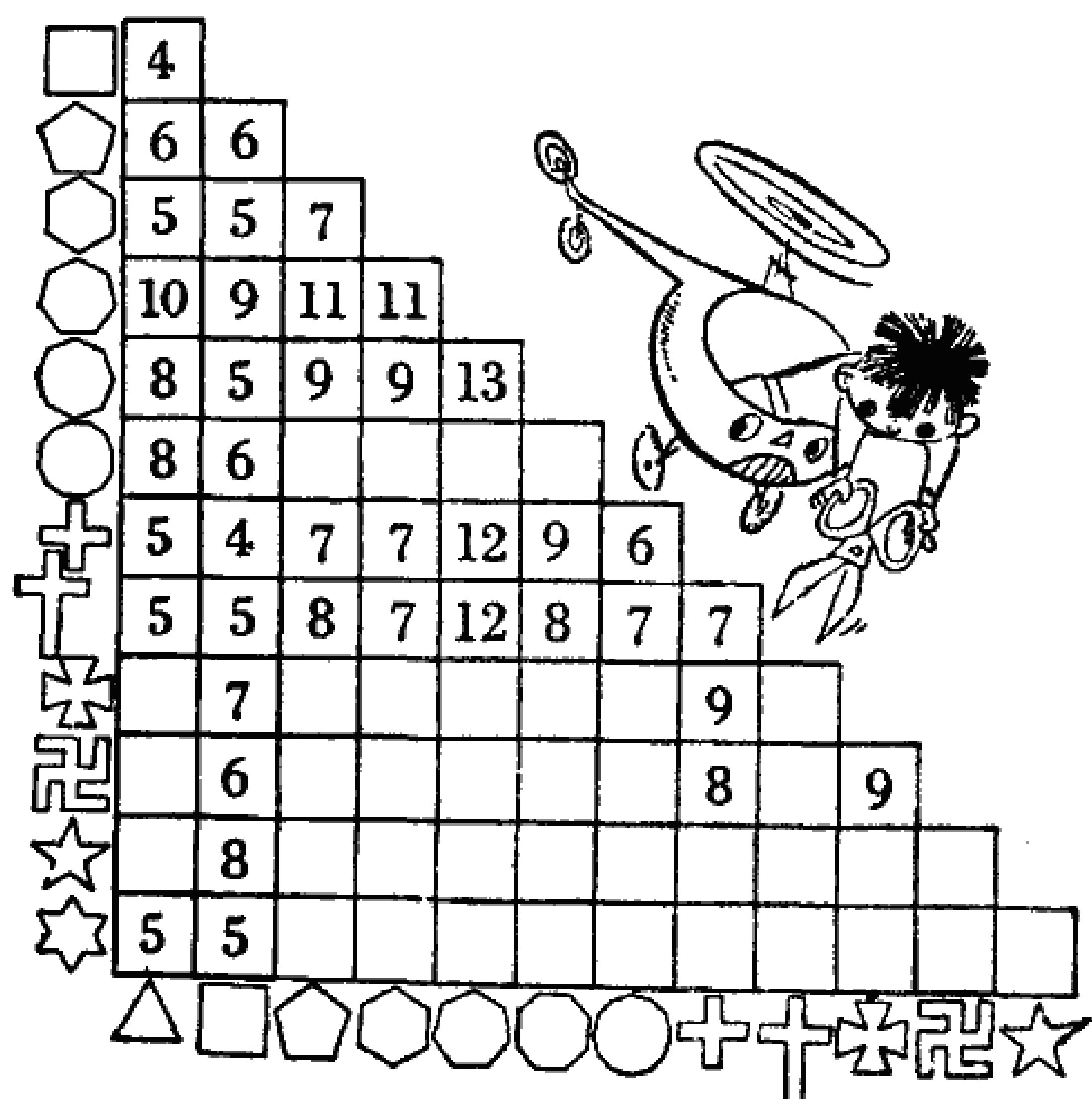
首先，解决这类问题，一般没有现成的章法可循。

一个人可以充分发挥自己的直觉、机敏与创造能力，使自己的成绩赶上或者超过专家。

其次，在大多数情况下，并不能证明现有的剪拼法中的分割块数，已经是最少的。长久保持着的纪录，有可能被新的、更巧妙的剪拼法所打破。

目前，在这个问题上的著名专家，是澳大利亚数学家林特格林，他是本世纪打破旧纪录最多的人。

前些年，根据林特格林系统整理的结果，得出了一

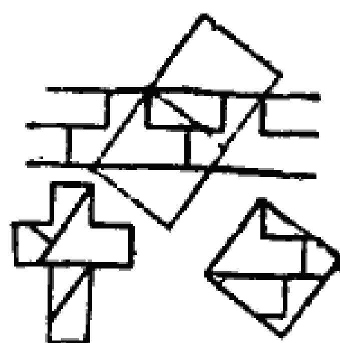


张剪拼问题的世界纪录表。

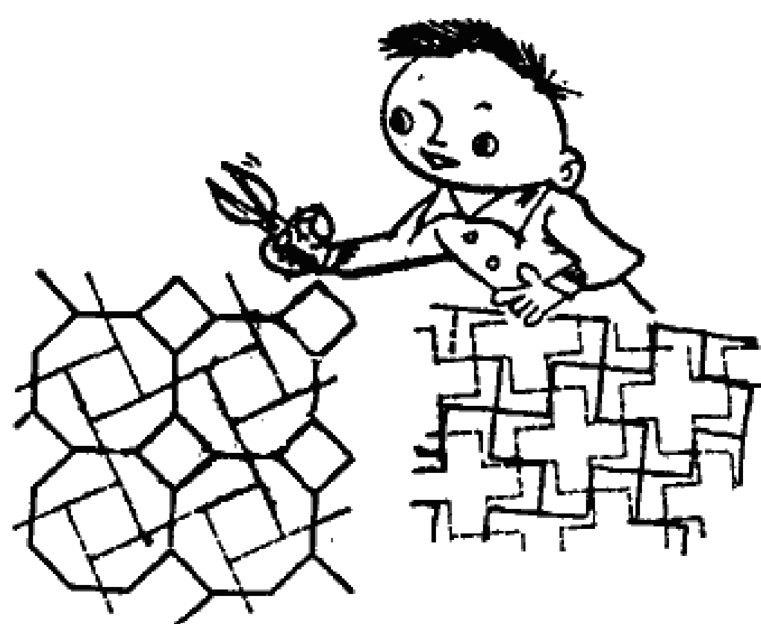
表中的空白位置，表示那种剪拼法还没有研究出来；或者虽然有了，可是块数太多，还不够理想。他预料，这张表在最近十年之内会大大改观，面貌一新。

林特格林研究出了两种正方形的剪拼方法：

一种叫做长带子法。例如要把一个拉丁十字剪拼成正方形，可以先把这种图形分别剪拼成两对边平行的长条带。对正方形来说，是无需再剪了，只要把几个正方形拼在一起，就能形成一条长带子（图中用虚线表示）。对拉丁十字来说，照图中实线的剪法，也能拼成一条长带子。这样做了以后，就可以把一条长带子，放在另一条长带子之上推移，然后尝试各种位置，直到发现最有利的位置为止。下图就是把拉丁十字剪成五块，再拼成正方形的办法。



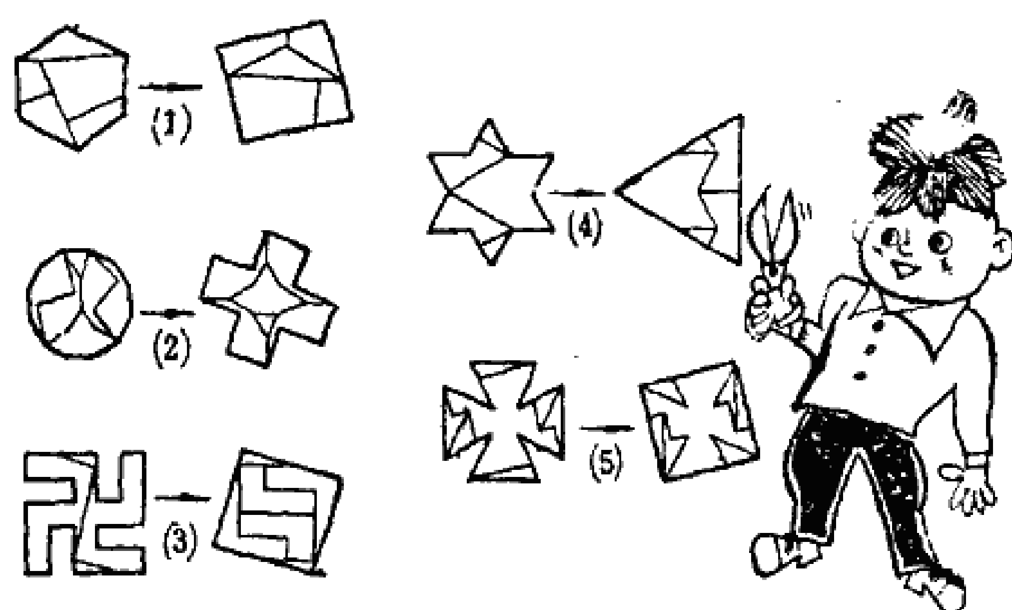
另一种叫做镶嵌图案法。例如要把一个正八边形剪拼成一个正方形，就可以使用这个方法。我们知道，在正八边形之间加上小正方形，可以组成镶嵌图案铺



满整个平面。只要分别把它们画在透明纸上，再把一种图案放在另一种图案之上推移，尝试各种有利位置，就能发现巧妙的剪拼法了。利用这个办法，可以找到把正八边形剪成五块后拼成正方形的办法。这个拼法，是一个英国人在 1933 年发表的，直到今天还保持着纪录。

用镶嵌图案法，林特格林又想出了把一个希腊十字，剪拼成两个小的希腊十字的方法，共剪了五块如上右图。

下面的五个剪拼图，其中四个是林特格林创造的纪录，特别是那个从正十二边形剪拼成希腊十字的图(2)，在1957 年发表后，一时议论纷纷，脍炙人口。



两个面积相等的多边形，总可以把其中的一个剪成有限块，再拼成另一个。这是可以证明的，也是剪拼技巧能蓬蓬勃勃发展的根本依据！

可是，两个体积一样的多面体，是不是一定能把一个剖成几块拼成另一个呢？这叫做希尔伯特第三问题。希尔伯特的学生戴尼回答了这个问题，答案是不一定。他证明：不能把正四面体剖成有限块拼成一个立方体！

一种新的几何

三角形三内角和只能等于 180° 吗？

欧几里德、黎曼和罗巴切夫斯基各有各的说法。不仅如此，他们还都能自圆其说，各自建立了一套完备的几何体系。只要其中一套，没有内在矛盾；另两套，也不会有内在矛盾！

现在初中学习的几何学，属于欧几里德几何学，它已有两千多年的历史了。黎曼和罗巴切夫斯基的几何学，只有一百多年的历史，统称非欧几何。它们在理论物理、天文学等领域中有重要作用，只不过一般人不知道罢了。

非欧几何远不止以上说的两种。可以用各种各样的办法，来建立新的非欧几何。出租汽车几何学，便是其中的一种。

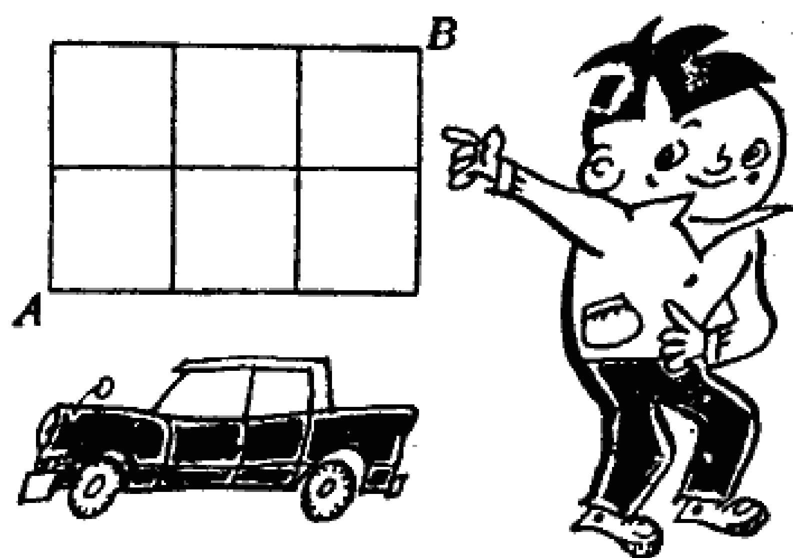
出租汽车几何学的奠基人，是出生在俄国的数学家明科夫斯基，他是物理学家爱因斯坦在瑞士读书时的数学老师。下面，简单说一下这门几何学的模样：

设想有一座庞大的城市，它的街道象北京那样纵

横交叉，排列成棋盘形状。根据交通规则，出租汽车只能在这些街道上来回行驶，不准开进小胡同里去，也不准停在马路当中。这种既没有辐射状，也没有同心圆的环行路的城市布局，可以用学校里常用的方格纸，来作为它的模型。

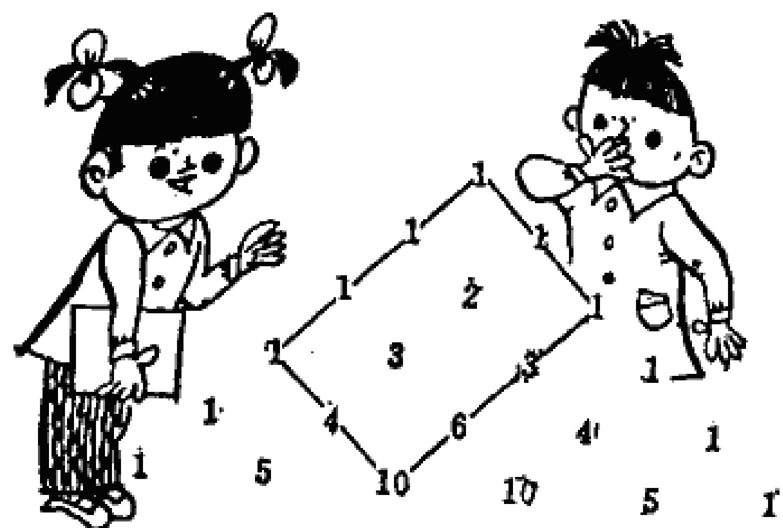
由图可见，只有方格纸上纵横线的交点，才是出租汽车可以停驻的地方。换句话说，这种几何学是一种不连续的，或者说是离散的几何学。

叫过出租汽车的人都知道，从甲地到乙地要按里程收费，并且从甲到乙，也可能有好几条不同的最短路线可供选择。比如说，从图 A 到 B，横的相距三条街，纵的相距二条街，一共有几条不同的行驶路线呢？一条一条地数，一共有 10 条。



这个题，也可以用我国著名的“杨辉三角形”来解。

画好杨辉三角形以后，在透明纸上画一个 2×3 的长方形，再把它套在杨辉三角形上，使 A 点与宝塔尖的 1 相重合；这时，B 点落的位置，与 10 重合。这就表示，从 A 到 B，不同的最短路共有 10 条。

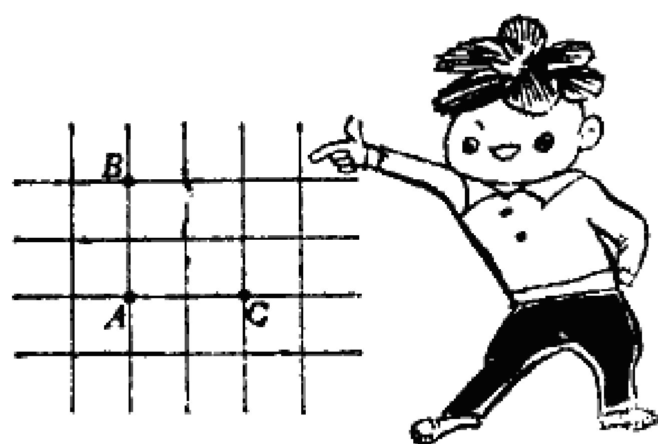


有意思的是，不仅是从 A 到 B，而且从 A 到矩形内任何一个交叉点的不同路线数，都能立即从杨辉三角形中直接读出。从这种意义上来说，它是一个好用的计数器。

刚才说了，在这种几何学中，两点之间的最短路线可能有很多。所以，以已知两个定点为端点的“边”，可能也有很多条。从这里可以看出，它和欧几里德几何学里所说的“两点唯一决定一直线”的结论，是多么不同了！

在出租汽车几何学里，也有各式各样的“多边形”，其中最简单的是“二边形”。在下页图的“三角形”中，可

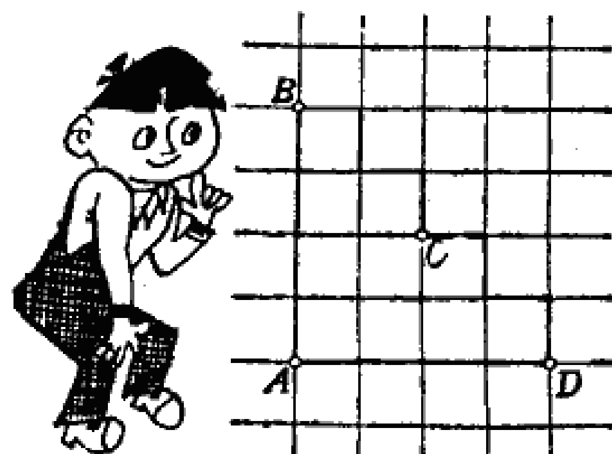
以看到一条著名的定理——“三角形中两边之和必大于第三边”，已经不成立了。你看，



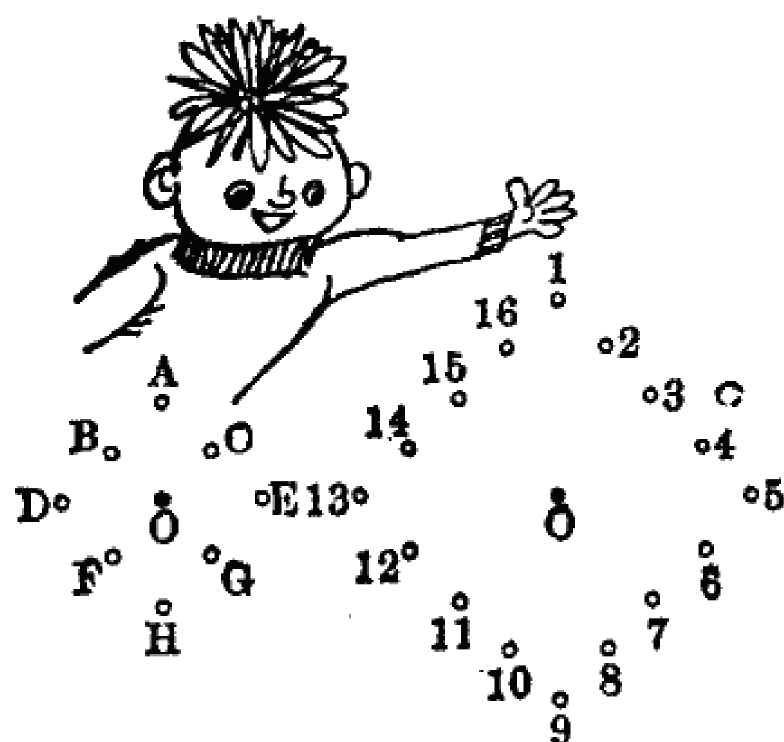
∵ AB = 2，AC = 2，BC = 4；

∴ AB + AC = BC。

要是规定：四边相等，四个角都是90°的四边形叫正方形，那么，如图的阶梯形也可以叫正方形：



你知道圆的定义是：与一个定点的距离等于常量的点的集合。那么，在出租汽车几何学里的圆，又是什么样子呢？下面，举两个实例：



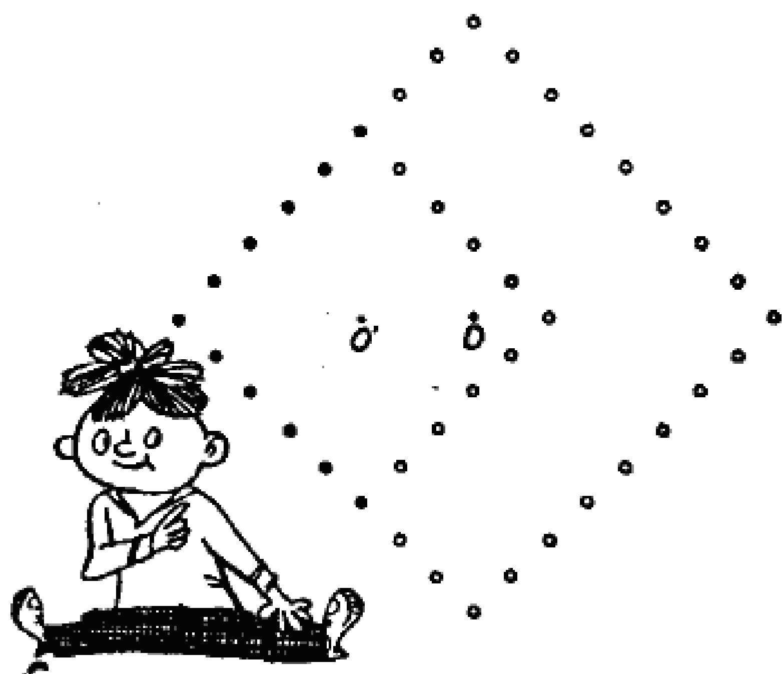
左图的圆心是 O，半径是 2 个单位，整个圆由八个点组成；右图的圆心是 O，半径是 4 个单位，整个圆由十六个点组成。

不难看出，在出租汽车几何学里，半径为 r 的圆包含 4r 个有限点，圆周长是 8r 个单位。更为有趣的是，要是你仍旧采用传统的表示圆周率的记号 π，就是圆周长与直径的比值，那就可以看出，在出租汽车几何学里，π 的值不是 3.1416，而是正好等于 4！

你不妨再仔细地观察一下上面包含八个点的那个圆，里面包含各式各样的内接正多边形，从二边形到正八边形，应有尽有。比如二边形 BE，正三边形 ADE，正方形 ADHE，正五边形 ABFGC，正六边形 ABDFGC，正

七边形 ABFHGEC，正八边形 ABDFHGEC。

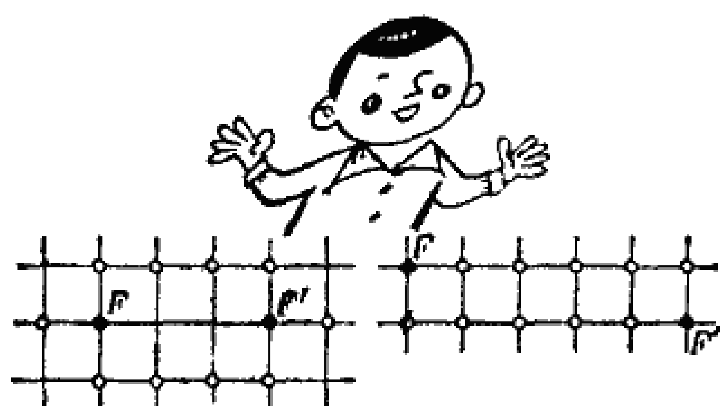
在欧几里德几何学里，两个不重合的圆，最多只可能有二个交点。可是在出租汽车几何学里，两个相交的圆的交点个数却可能多得多。下图，一个圆的半径是 5，一个圆的半径是 8，它们的交点竟有十一个之多！



下面再请你看看这种几何学里的圆锥曲线的形壮。

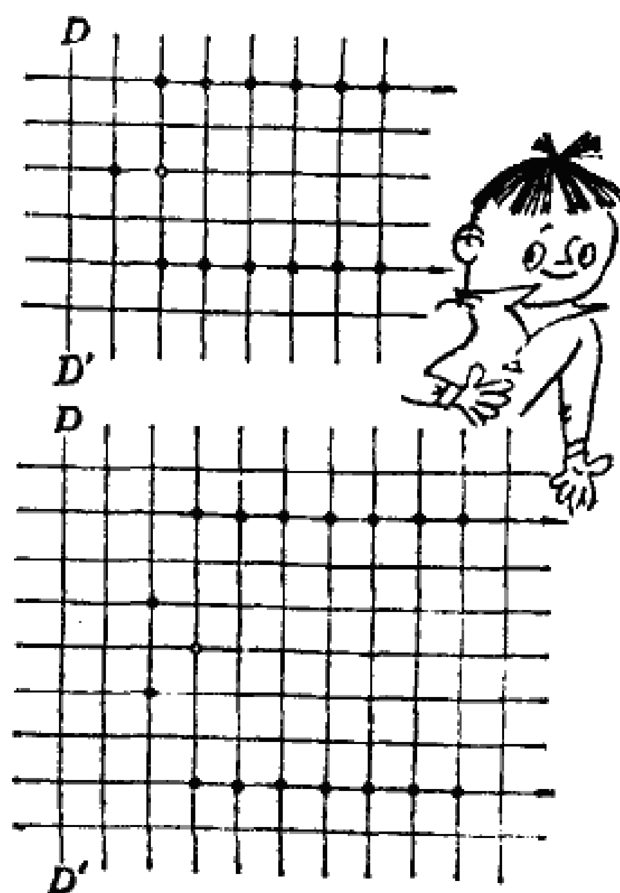
椭圆的定义是：与两个定点的距离之和，等于常量的点的集合。这两个定点称为椭圆的焦点，距离为2c；常量用 2a 来表示。在 a＞c 的情况下，可以作出椭圆。

在出租汽车几何学里，椭圆的形状有多种多样，下面画出两个。图上的F与F′表示椭圆的焦点。有趣



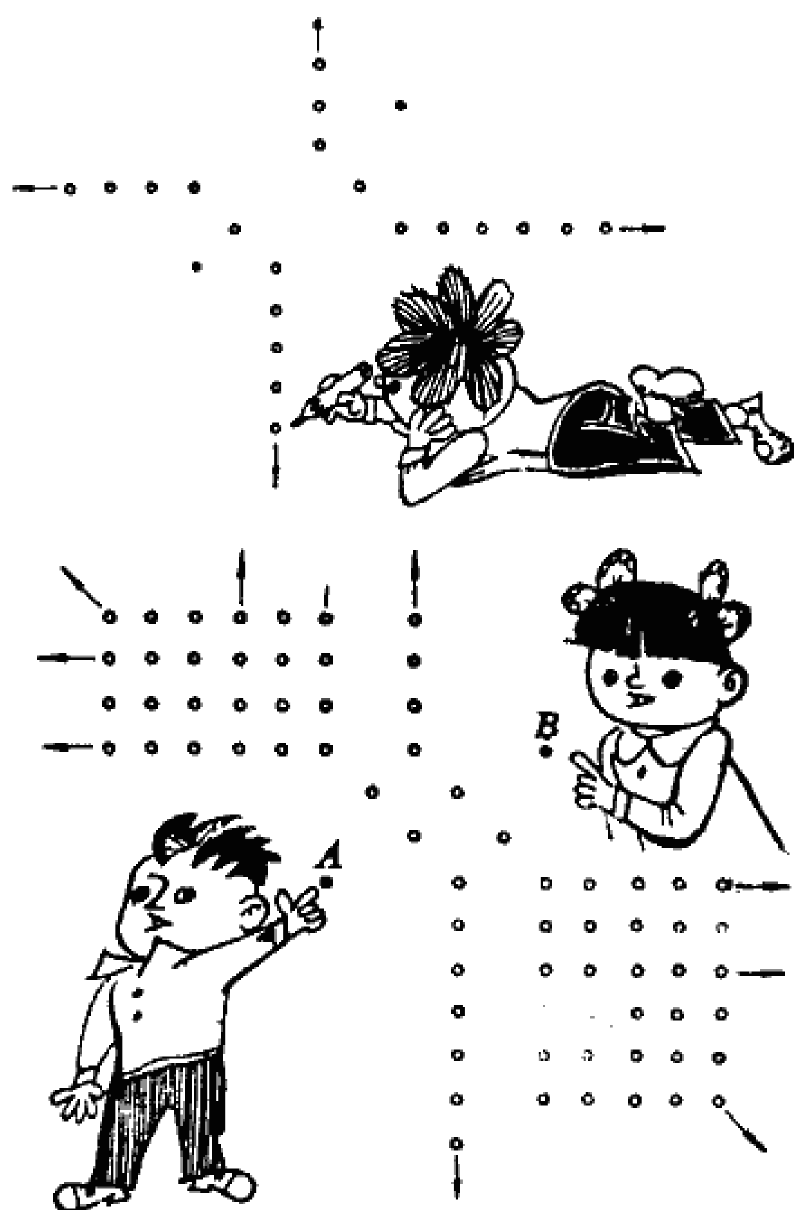
的是，在右面的图中，焦点F与F′也是椭圆上的点。

什么是抛物线？到一个定点(焦点)的距离，与到一条定直线(准线)的距离相等的点的集合。下面的图形，就是出租汽车几何学里头的抛物线。你看，它们与



常见的抛物线，似乎还有点相象，可不再是一条光滑曲线了，而是表现出棱角，甚至还能直角转弯哩！有些性质，与欧几里德几何学里的抛物线也大不一样。上页下图的那条抛物线，就没有顶点了！

最难捉摸的是双曲线，它几乎已经完全走了样，我们很难加以识别了。下面也举出两个例子。



在上图中，差是2个单位；在下图中，差是8个单位。双曲线两个焦点的相对位置都是一样的，以便加以对比。有趣的是，随着所取差的单位数的不同，一个是2，一个是8，不仅双曲线的形状有很大差别，甚至连两个分支所处的方位也完全两样了！



图解渡河难题

春秋战国时代，楚国和晋国连年打仗，伤亡惨重，结下了冤仇，弄得两国的人民，相互之间也都不信任了。在历次战争中，楚国失败的次数多。所以，一般晋国人都害怕楚国人要报复。

有一次，三个楚国商人和三个晋国商人一起到齐国去经商。齐国的主顾要求六个人同日到达，说是这样才好接待和拍板成交，少了任何一个都不答应。为此，他们只好结伴同行，一路上勾心斗角。

一天傍晚，他们来到了一条大河边。河水很深，他

们又都不会游泳，河上也没有桥梁。幸好岸边有一只小船，可是船太小了，一次最多只能渡过两人。这六个商人，人人都会划船。为了防止发生意外，不论在河的这一岸和那一岸，或者在船上，都不允许楚国的商人数超过晋国的商人数。

请问，怎样才能把六个人全部渡过河去？

解决这个比较复杂的渡河问题，可以采用在括号里写两个数的办法，来记录河左岸人数的变化情况。在括号中的一对数，前一个表示楚国商人数，后一个表示晋国商人数。例如(2,3)，就是说河的左岸有2个楚国商人，3个晋国商人。

开始时，六名商人全在左岸，采用上述记法，就是(3,3)。我们的目的是要使他们全部过河，到达右岸，所以终极目标是(0,0)。也就是说，他们全部过了河，左岸没有人了。问题是怎样才能从(3,3)，逐步演变到(0,0)呢？

按规定，有些情况是不许可的。例如(3,2)，说明在左岸的楚人比晋人多，这就是不许可的。于是，许可的情况只有

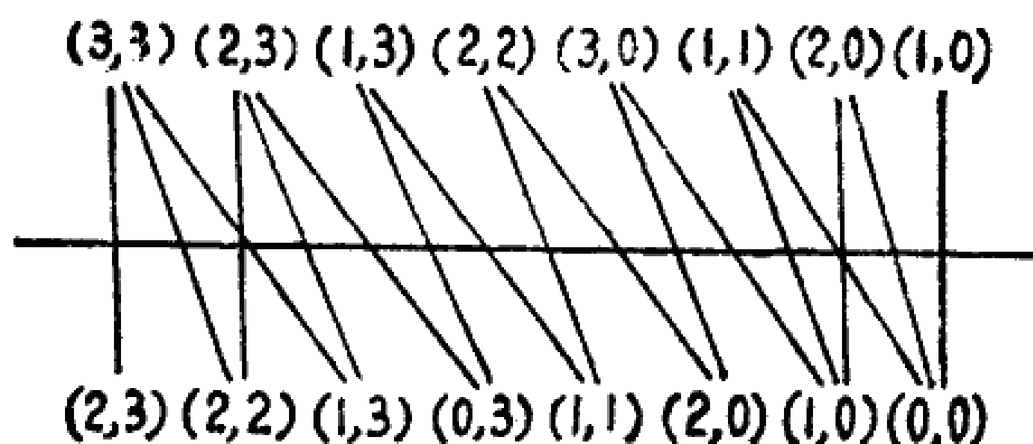
(3,3)， (2,3)， (1,3)， (0,3)， (2,2)，
(1,1)， (0,0)， (1,0)， (2,0)， (3,0)

这十种。至于船上的情况，因为船最多渡两人，不会发

生楚人比晋人多的情形，所以不用考虑。

为了说明小船在左岸还是在右岸，我们画一条横线，横线上方的括号里的数对，表示船在左岸时的情况；横线下方的括号里的数对，表示船在右岸时的情况。

要是从甲情况可以一步演变到乙情况，当然这时由乙情况也一定可以演变回去，就在甲、乙之间连一条线。例如从上方的(3,3)，可以一步变到下方的(2,3)，或者(2,2)、(1,3)，就由(3,3)向这三个括号各画一条线。把所有与(3,3)相连的线都画出来，这就得到一张图：



把这张图翻译出来，便是：

第一步，两名楚国商人从左岸到右岸；

第二步，其中一人划船回到左岸；

第三步，回来的一人与原先留在左岸的一名楚国人一起渡河；

第四步，一名楚国人划船回来；

第五步，两名晋国人过河；

第六步，一名楚国人和一名晋国人回来；

第七步，两名晋国人过河；

第八步，一名楚国人回来；

第九步，两名楚国人过河；

第十步，一名楚国人回来；

第十一步，两名楚国人过河。到此，全部人员渡河完毕。

从图上看出，共有四种最好的渡河办法，都是要渡11次。

明白了这个道理和办法后，你就不难解决：当楚国人和晋国人各有六人，而小船一次最多可容纳五人时，只用七步就可完成渡河。

要是不限定步数，只要小船每次最多可容纳四人，那就可以证明，任意数目的楚国商人和晋国商人，只要人数相等，都是可以渡过河去的。

这种方法，在数学里名叫状态分析图。它在人工智能等学科的研究中，有着蓬勃的生命力。

这个问题里用到的图，连线是不带箭头的，表示既可以演变过去，也可以演变回来，叫做无向图。下面要讲的，是有向图。

高塔逃生纪要

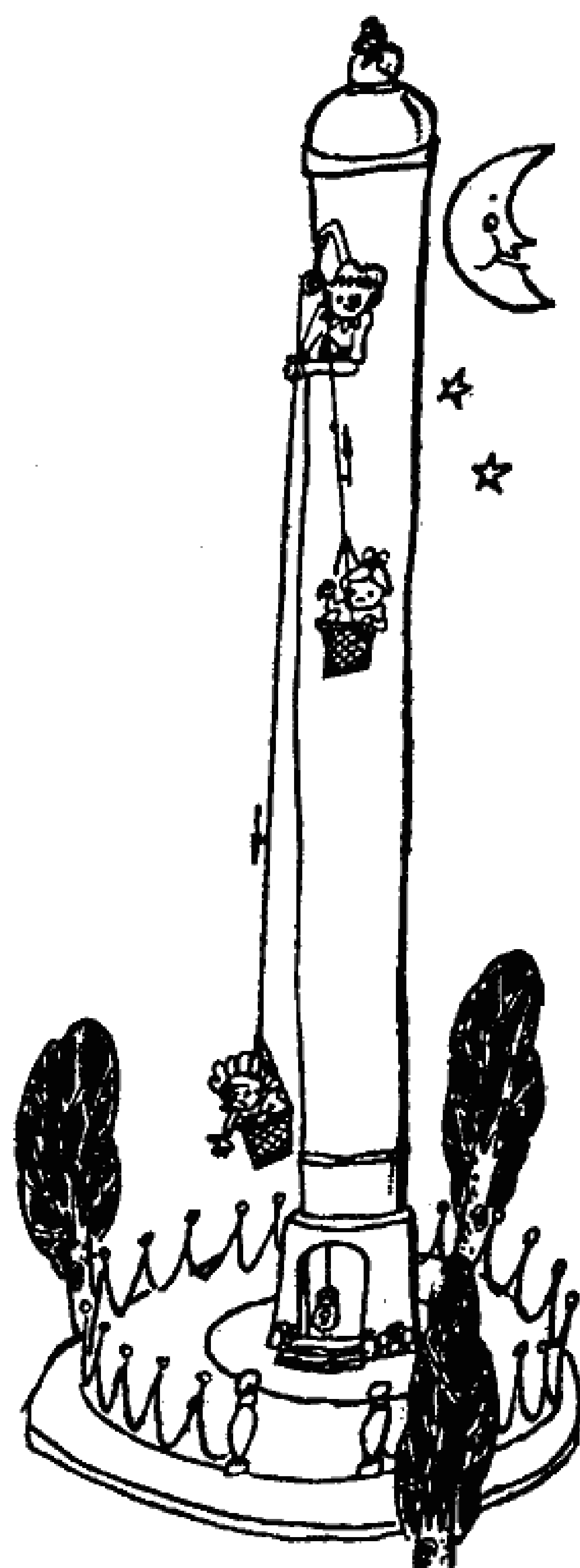
这是流传在苏联格鲁吉亚的民间故事。

三百多年前，这块土地被一个凶暴残忍的大公统治着。他有一个独生女儿，不但异常美丽，而且心地善良，经常接近和帮助穷苦人。她已经有二十岁了，大公把她许配给邻国的一个王子，可是她却爱着一个铁匠——年轻的海乔。由于出嫁的日子快要到来，她和海乔冒险逃到山里，可是很不幸，给大公手下的人抓回来了。

大公暴跳如雷，决定第二天就要把他们处死，命令手下的人在今天夜里，把他们关在一座没有完工的阴森的高塔里。关在一起的，还有一个侍女，因为她曾经帮助过他们逃跑。

塔很高，在顶上一层，才开有窗子，从那里跳下去准会粉身碎骨。大公想，派人看守，说不定看守的人会同情他们，把他们放掉，所以下令撤掉一切看管，并且不准任何人接近那座塔。

海乔知道无人看守，四周围又没有任何人监视，一



线希望不禁油然而生。他顺着梯子走到最高层，望着窗外沉思。

海乔仔细寻找塔内有没有什么东西可以帮助他们逃跑。不久，他发现有一根建筑工人遗留在那里的绳子，绳子套在一个生锈的滑轮上，而滑轮是装在比窗略高一点的地方。绳子的两头，各系着一只筐子。原来这是泥水匠吊砖头用的。

海乔做过建筑工人，他经过一番观察和估量，断定两只筐子的载重量只要不超过170公斤，两只筐子的载重相差接近10公斤、而又不超过10公斤，那么，筐子就会平稳地下落到

地面。

海乔知道他爱人的体重大约是50公斤，侍女大约有40公斤，自己的体重是90公斤。他在塔里又找到一条30公斤的铁链。他经过一番深思熟虑，终于使三个人都顺利地降落到地面，一同逃走了。

请问，他们究竟是怎样逃走的？

这个故事很有趣。经过反复试探，不断修正，不难解决这个问题。

一，海乔先把30公斤的铁链放在筐里降下去后，就叫侍女(40公斤重)坐在筐里落下去，这时放有铁链的筐子回上来。

二，海乔取出铁链，让爱人(50公斤重)坐在筐里落下去，她下降到地面时，侍女回上来。侍女走出来后，爱人也走出筐子。

三，海乔又把铁链放在空筐中，再一次降到地面，爱人坐了进去(这时筐的载重量是50＋30＝80公斤)，海乔(90公斤)坐在上面的筐里，落到地面后，爱人走出上面的筐子后，他也走出筐子。

四，留在筐中的铁链，再次降到地面，这次又轮到侍女坐在上面的筐子里降落到地面，装着铁链的筐子回上来。

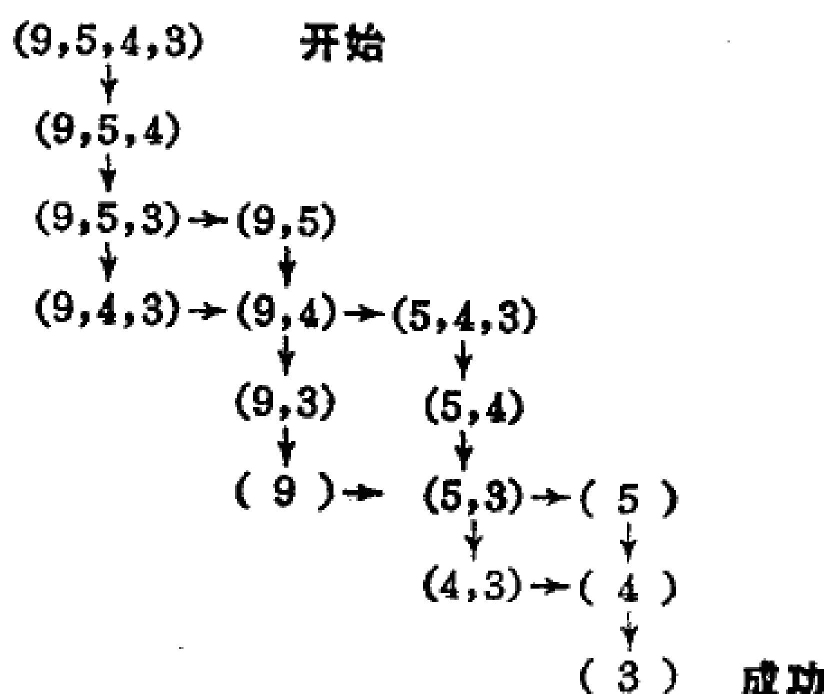
五，爱人从上来的筐子里取出铁链，自己坐了进

去，下降到地面，同时侍女升上来。到达地面以后，侍女走出筐子后，爱人也走出筐子。

六，侍女再把铁链放进筐子，又把它降到地面，然后自己坐进升上来的空筐下降，到达地面后，就走出筐子，与海乔和他的爱人会合，一起逃脱了大公的魔掌，远走高飞了。

怎样找寻逃生的方案？也可以用图。

90公斤重的海乔，50公斤重的爱人，40公斤重的侍女，30公斤重的铁链，分别用9，5，4，3表示。这四种物体，可以组成16种不同的情况。例如(9，5，4，3)全在塔上是一种情况，(9，5，4)在塔上也是一种情况，只有(3)在塔上也是一种情况。通过滑轮绳子，可以从一种情况变成另一种情况。要是甲情况可以变成乙情



况，就从甲向乙画一个带箭头的线。

很明显，要是从(9,5,4,3)到(3)，可以找到一条箭头方向一致的路程，海乔他们三人便可得救了。

这个图和渡河的图不一样，连线是带箭头的。说明情况的演变有一定方向，不能够再退回去。这种图叫做有向图。

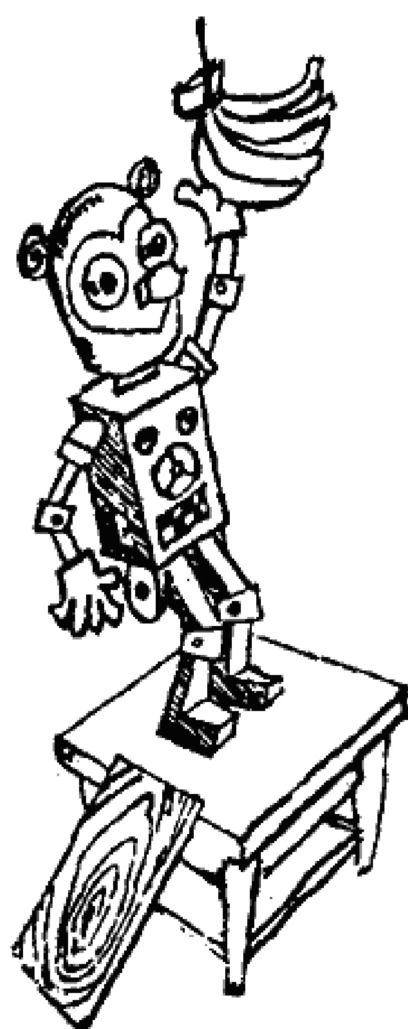
从图上可以看出来，有八种不同的方案可以逃生，而且只有这八种方案。这就是图的方法的优点。它可以帮助你找出所有的方案，而不再是停留在摸索和尝试的阶段。

高塔逃生是个故事，信不信由你。不过，下面所说的却是真事了。

1963年，国外计算机科学家编出了一个名叫"猴子吃香蕉"的程序。一只没有生命的猴子(机器人)在房间里踱来踱去，它忽然看见了挂在天花板上的一串香蕉，不禁馋涎欲滴，可是它的手不够长，怎么也拿不到香蕉。猴子仍不死心，它开动脑筋，看到室内还有一个台子和一块木板。于是，它很高兴，就把木板架好，走到台子上，伸手就抓到了香蕉。

猴子吃香蕉和海乔他们高塔逃生，是两个毫无关系的问题。可是，海乔和猴子都是自觉和不自觉地运用数学里的一种状态-手段分析法，来解决问题的。

状态-手段分析法，是一种非常重要的数学方法，有着蓬勃的生命力。它正在你意想不到的地方开花结果。比如说，过去用人工方法合成维生素B_{12}，工作量超过一千人年，现在采用状态-手段分析法，编个程序，通过电子计算机，只用六分钟就发现了六种不同的合成方法。化学家惊呼，有机化学面临剧烈变革的时代已经到来！



［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学游戏故事
作者＝谈祥柏　张景中
页数＝１１６
ＳＳ号＝
出版日期＝１９８４年１０月第１版